יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071
אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)
תרגיל בית מס' 8.

(1) (א) תהיינה $f,g\in\mathcal{O}\big(D_r(a)\setminus\{a\}\big)$. מיינו את הנקודה הסינגולרית ב $z=a$ עבור הפונקציות:
i. $f+g$, ii. $f\cdot g$, iii. $\frac{1}{f}$, iv. f', v. $g^{(n)}$, vi. e^f, כאשר ידוע ש:
(i) ל f יש נקודה סינגולרית עיקרית ול g יש קוטב מסדר m ב $z=a$.
(ii) ל f יש נקודה סינגולרית סליקה ול g יש נקודה סינגולרית עיקרית ב $z=a$.
(iii) ל f יש קוטב מסדר n ול g יש קוטב מסדר m ב $z=a$ ($m\neq n$).
(ב) נניח שעבור $f\in\mathcal{U}(D_\epsilon(a)\setminus\{a\})$ מתקיים: $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$. הוכיחו: $z=a$ הינה נקודה סינגולרת סליקה.
(ג) האם קיימת $f\in\mathcal{O}(D_\epsilon(0)\setminus\{0\})$ המקיימת: $|f(z)|\geq C\cdot e^{\frac{1}{|z|}}$? (כאן C הינו קבוע.)
(ד) הוכיחו שבכל סביבה של $z=0$ פונקציה $f=e^{\frac{1}{z}}$ מקבלת את כל הערכים של $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
(ה) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ המקיימת: $|f(z)|\leq|z|^{-\frac{3}{2}}$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. הוכיחו: $f(z)\equiv 0$.

(2) (א) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ לא קבועה. הוכיחו/הפריכו:
(i) ל f יש רק מספר סופי של אפסים בכל תת קבוצה סגורה של $\mathbb{C}$.
(ii) ל f יש רק מספר סופי של אפסים בכל תת קבוצה חסומה של $\mathbb{C}$.
(iii) אם ל f יש קוטב ב ∞ אז f הינה פולינום.
(ב) נניח ש $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ הינה חח"ע. הוכיחו: $f(z)=az+b$.
(ג) נניח ש $f,g\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימות: $|f(z)|\leq|g(z)|$ ב $\mathbb{C}$ כולו. הוכיחו: $f(z)=cg(z)$.

(3) (א) תהי f מרומורפית (ב $\mathbb{C}$) ולא קבועה. הוכיחו: התמונה של f היא קבוצה צפופה ב $\mathbb{C}$.
(ב) תהי f מרומורפית (ב $\mathbb{C}$), נניח כי קיימים $M,R>0$ כך ש $|f(z)|<M$ עבור $|z|>R$. הוכיחו כי f פונקציה רציונלית (מנה של שני פולינומים). האם אותה המסקנה מתקבלת במקרה של תנאי: $|f(z)|>M$ עבור $|z|>R$?
(ג) תהי f מרומורפית (ב $\mathbb{C}$). נניח ש $|Re(f(z))|<C$, עבור קבוע C מסוים. הוכיחו: f הינה קבועה.
(ד) תהי f מרומורפית (ב $\mathbb{C}$). נניח שקבוצת הערכים של f זרה לקבוצה $\mathbb{R}_{\leq 0}\subset\mathbb{C}$. הוכיחו: $f=const$.
(רמז: בדקו שפונקציה $\sqrt{f(z)}$ מוגדרת היטב ושלמה. מהי התמונה שלה?)
(ה) הוכיחו שכל פונקציה מרומורפית ב $\bar{\mathbb{C}}$ הינה מנה של שני פולינומים.
(ו) תהי f מרומורפית בתחום חסום $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$. עבור כל תת קבוצה סגורה $X=\bar{X}\subset\mathcal{U}$ הוכיחו: ל f יש לכל היותר מספר סופי של אפסים וקטבים ב X.

(4) נניח שפולינום $p(z)=\sum_{j=0}^{n}p_jz^j$ חסום ע"י 1 ב $D_1(0)$. הראו כי $|p_j|\leq 1$.

(5) (א) תהי $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ ונקבע סדרת מספרים $z_n=r_ne^{i\theta_n}$ המקיימת: $\theta_n\in[-\alpha,\alpha]$.
הוכיחו: הטורים $\sum z_n$, $\sum|z_n|$ מתכנסים/מתבדרים יחד.
(ב) חשבו $\sum_{n=0}^{\infty}r^n cos(n\theta)$, $\sum_{n=0}^{\infty}r^n sin(n\theta)$, כאשר $0\leq r<1$, $\theta\in\mathbb{R}$.
(ג) פתחו את $f(z)=\frac{sin(z)}{z-\pi}$ לטור טיילור בנקודה $z=0$. מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור.

(6) (א) ב נראה שלא ניתן להכליל את משפט על ערך הביניים (של חדווא"ה1) לפונקציות מרוכבות. נתבונן ב $f(z)=e^{iz}$ המוגדרת על קטע $[0,\pi]\subset\mathbb{C}$. הראו שאף נקודה של קטע $(-1,1)\subset\mathbb{C}$ לא מתקבלת כערך של f.
(למרות ש f רציפה ו $f(0)=1$, $f(\pi)=-1$.)
(ב) נזכיר את משפט $Lagrange$ (של חדוו"א 1): אם $[a,b]\xrightarrow{f}R$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. האם המשפט מתקיים עבור פונקציות מרוכבות?

(7) האם קיימת $f\in\mathcal{O}(D_1(0))$ המקיימת $|f(z)|=e^{|z|}$? (התוכלו לפתור גם בלי שום שימוש בפונקציות מרוכבות?)

(8) נגדיר $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ בתחום $\mathcal{U}=\mathbb{C}\setminus\{it|\ t\in\mathbb{R},\ |t|\geq 1\}$.
(א) הראו ש קיימת ל f פונקציה קדומה $F\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ כך ש $F(0)=0$.
(ב) נגדיר $tan(z):=\frac{sin(z)}{cos(z)}$. תהי $D\subset\mathbb{C}$ פתוחה וקשירה ומכילה את הראשית כך ש $tan(D)\subseteq\mathcal{U}$. הוכיחו שב D מתקיים $F(tan(z))\equiv z$.

(9) תהי $f\in\mathcal{O}(D_1(0))$ כך ש $|f(z)|\leq 1$ ב $\mathcal{O}(D_1(0))$. נניח ש $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$. הוכיחו: $|f(z)|\leq|z|^n$ לכל $z\in D_1(0)$.