יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 9.

(1) (א) מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של הפונקציות הבאות. חשבו את השאריות בנקודות האלו

i. $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$, ii. $cos(\frac{1}{z-2})$, iii. $z^n sin(\frac{1}{z})$, iv. $\frac{1}{sin(z)}-\frac{1}{tan(z)}$, v. $cos(e^{\frac{1}{z}})$.

(ב) תהי $f\in\mathcal{O}(D_\epsilon(0))$. האם בהכרח מתקיים: $f(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=\frac{\epsilon}{2}} f(z)sin\frac{1}{z}dz$?

(ג) תהי $f\in\mathcal{O}(D_\epsilon(0)\setminus\{0\})$. בטא את $\underset{z=0}{Res}(f(cz))$ בעזרת $\underset{z=0}{Res}(f(z))$ ו c.

(ד) נניח ש $f(z)=-f(-z)$ ו a נקודה סינגולרית מבודדת. הוכיחו: $\underset{z=a}{Res}\, f=\underset{z=-a}{Res}\, f$. נסחו והוכיחו תכונה דומה עבור פונקציה המקיימת $f(z)=f(-z)$. בפרט קבלו $\underset{z=0}{Res}\, f=\underset{z=\infty}{Res}\, f=0$.

(ה) חשבו את האינטגרלים הבאים:

i. $\int\limits_{|z|=6} tan(z)dz$, ii. $\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^3}dz$, iii. $\int\limits_{|z+1|=1}\frac{dz}{z^3-i}$, iv. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{sin(\frac{1}{z})dz}{z-1}$, v. $\oint\limits_{|z|=2}\frac{sin(\frac{1}{z})dz}{z-1}$

v. $\int\limits_{|z|=R}\frac{zdz}{e^{2\pi iz^2}-1}$, כאשר $n<R^2<n+1$ עבור $n\in\mathbb{N}$ מסוים.

(ו) תהי C שפת המלבן עם קודקודים $\{0,4i,10+4i,10\}$, בכיוון החיובי. חשבו: $\int\limits_C\frac{dz}{z^2-z+1}$,

(2) (א) הוכיחו שפונקציה $f(z)=log\frac{z}{z+2}$ מוגדרת והולומורפית בתחום $\mathbb{C}\setminus[-2,0]$. (כאן log הינו הענף הראשי)

(ב) חשבו את $\underset{z=\infty}{Res}(f)$. האם ל f קיימת פונקציה קדומה ב $\mathbb{C}\setminus[-2,0]$?

(ג) נגדיר $g(z)=e^{\frac{f(z)}{n}}$. הסיקו ש $g\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus[-2,0])$.
g נקראת שורש (מסדר n) של פונקציה $\frac{z}{z+2}$ המתאים לענף הראשי של log.

(ד) חשבו את $\int\limits_{|z|=R} g(z)dz$ כאשר $R>2$.

(3) חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) i. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5+3cos(x)}$, ii. $\int_0^{\pi}\frac{cos^2(x)dx}{1-a\cdot sin^2(x)}$, עבור $0<a<1$ iii. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{cos(nx)}{a-cos(x)}dx$, עבור $a>1$, $n\in\mathbb{N}$,

iv. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|ae^{it}-b|^4}$, כאשר $0<a<b$.

(ב) i. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x+x^2}$, ii. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(x)dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $0<a<b$, iii. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n}$, עבור $n>1$, זוגי.

(כאן ניתן או לעבור ל $\int_{-\infty}^{\infty}(\dots)$ או להשתמש בקרן בזוית α ביחס לציר $\hat{x}$. מהו α? איזו דרך קצרה יותר?)

iv. $\int_0^{\infty}e^{-t^2}sin(t^2)dt$, (גזרה עם זווית $\theta=\frac{\pi}{8}$)

v. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}dx}{e^x+1}$, עבור $0<a<1$. (התבוננו במלבן עם קודקודים $\{R,R+2\pi i,-R+2\pi i,-R\}$.)

vi. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(x)dx}{e^x+e^{-x}}$, (התבוננו במלבן עם קודקודים $\{R,R+\pi i,-R+\pi i,-R\}$.)

(4) שאלות חזרה

(א) פתחו את $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$ לטור Laurent ב $z=0$. מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור.

(ב) האם קיימת $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ שמקיימת: $\{f(n)=0\}_{n\in\mathbb{N}}$ ול f יש קוטב ב $z=\infty$?

(ג) תהי $D_1(0)\xrightarrow{f}D_1(0)$ כך ש $f(0)=0$. הוכיחו: $|f(z)+f(-z)|\le 2|z|^2$.

(ד) נניח ש $f,g\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימות: $|f(z)|\le|g(z)|$ עבור כל $z\in\mathbb{C}$. הוכיחו: $f=c\cdot g$, עבור קבוע $|c|\le 1$.

(ה) נניח ש $f\in\mathcal{O}(D_\epsilon(0))$ מקיימת: $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2+1}$ עבור $n\in\mathbb{N}$ $1\ll n$. חשבו את $f(\frac{\epsilon}{2})$.

(ו) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_n\})$. הוכיחו שקיימות פונקציות $f_0,f_1,\dots,f_n\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ כך ש $f(z)=f_0(z)+f_1(\frac{1}{z-a_1})+\dots+f_n(\frac{1}{z-a_n})$. (רמז: השתמשו בחלק העיקרי של טור לורן בכל נקודה סינגולרית)