

חזו"א 2 למכונות, 201-1-9721

אביב 2017. תרגיל בית מס' 1.

1. במקבילית $ABCD$ $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{a}$. בטא באמצעות \vec{a} , \vec{b} את \vec{MA} , \vec{MB} , \vec{MC} , \vec{MD} , כאשר M היא נקודת חיתוך האלכסונים.
2. הוקטורים \vec{a} & \vec{b} יוצרים זווית בת 120° ו- $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. חשב:
 - א. $\vec{a} \cdot \vec{b}$
 - ב. $\vec{a} \cdot \vec{a}$
 - ג. $(\vec{a} + \vec{b})^2$
 - ד. $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$
3. הוכח את הזהות $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$ ותן לה פירוש גיאומטרי.
4. עבור אילו ערכים של α ו- β הוקטורים $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \beta\vec{k}$, $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ קולינאריים?
5. הוכח כי הנקודות $A(0,0,0)$, $B(2,0,-4)$, $C(2,-1,-1)$, $D(1,-1,1)$ הן קדקודים של טרפז.
6. מצא $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ כאשר $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.
7. הוכח שהמרובע $ABCD$ הוא ריבוע אם $A(2,1)$, $B(4,0)$, $C(5,2)$, $D(3,3)$.
8. נתון $A(6,-4,2)$, $B(3,2,3)$, $C(3,-5,-1)$. הוכח כי משולש ABC הוא ישר זווית.
9. נתון $A(2,1,-4)$, $B(1,3,5)$, $C(7,2,3)$, $D(8,0,-6)$. הוכח כי $ABCD$ הוא מקבילית.
10. חשב $|2\vec{a} - \vec{b}|$ אם $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.
11. חשב את קוסינוסי הכיוון של $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
12. חשב את $\vec{a} \times \vec{b}$ כאשר $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
13. חשב את שטח המשולש ABC כאשר $A(3,6,4)$, $B(4,2,-1)$, $C(2,3,5)$.
14. נתון $\vec{a} = (2,-3,1)$, $\vec{b} = (-3,1,2)$, $\vec{c} = (1,2,3)$. חשב את $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ואת $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.
15. חשב את מכפלה מעורבת $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ כאשר $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = (1,1,4)$.
16. הוכח כי הוקטורים $\vec{a} = (2,5,7)$, $\vec{b} = (1,1,-1)$, $\vec{c} = (1,2,2)$ קופלנריים.
17. מצא נפח של פירמידה $ABCD$ כאשר $A(2,2,2)$, $B(4,3,3)$, $C(4,5,4)$, $D(5,5,6)$.
18. הוכח כי הנקודות $A(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C(2,1,2)$, $D(2,2,2)$ נמצאות על מישור אחד.
19. הוכח: אם $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, אזי $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ קופלנריים.
20. הוכח שהוקטור $\vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\vec{a}^2}$ מאונך לוקטור \vec{a} .

21. הוכיחו: i. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = -\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$ ii. $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ iii. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$ iv. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{0}$
22. (א) הוכיחו שמשוואת המישור העובר דרך נקודות $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ נתונה ע"י:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{pmatrix} = 0$$
- (ב) עבור איזה ערך של a הנקודות $A = (-1, 2, 1), B = (0, 1, -5), C = (1, 2, -1), D = (-2, 1, a)$ נמצאות באותו מישור?
- (ג) נתונים המישורים $L_1 = \{3x - 4y + 2z = -1\}, L_2 = \{4x - 5y + 3z = 2\}$. מצאו את משוואת המישור L_3 העובר דרך ראשית הצירים ומאונך ל $L_1 \cap L_2$. מצאו את נקודת החיתוך של שלושת המישורים האלה.
23. (א) הוכיחו שהמרחק (הקטן ביותר) מנקודה $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ למישור $\{ax + by + cz = d\} \subset \mathbb{R}^3$ נתון ע"י

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
- (ב) הוכיחו שהמרחק (הקטן ביותר) בין מישורים $\{ax + by + cz = d_1\}, \{ax + by + cz = d_2\}$ נתון ע"י

$$\frac{|d_1 - d_2|}{|(a, b, c)|}$$
24. מצא נקודה סימטרית לנקודה $P(2, -3, 4)$ ביחס למישור $3x + 4y + 5z + 36 = 0$.
25. מצא נקודה סימטרית לנקודה $P(4, 3, 10)$ ביחס לישור $z = 3 + 5t, y = 2 + 4t, x = 1 + 2t$.
26. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(0, 1, -1)$ המקביל לקו החיתוך של המישורים:

$$3x + y - 2z = 2, 2x - y + 3z + 7 = 0$$
27. הוכח כי הישרים $x = 2t - 3, y = 3t - 2, z = 6 - 4t$ ו- $x = t + 5, y = -4t - 1, z = t - 4$ נחתכים. מצא את נקודת החיתוך.
29. יהי D המישור המוגדר ע"י המשוואה $7x + 3y + 2z = 1$. מצא את הנקודה Q במישור D הקרובה ביותר לנקודה $P(1, 0, -1)$; הרכב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות P ו- Q ; וחשב המרחק PQ .