חדו"א2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2017. תרגיל בית מס' 10.

(1) המשטחים למטה נתונים ע"י פרמטריזציה. קבלו את המשוואות שמגדירות את המשטחים. ציירו/תארו את המשטחים. השתמשו בפרמטריזציה כדי לחשב את וקטור הנורמל בנקודה כלשהי של משטח. בדקו האם הנורמל פונה כלפי חוץ/מעלה.

i. $\vec{r}(s,t)=\big(s\cdot cos(t)-1, s\cdot sin(t)-2, s^2-3\big)$, $s\in\mathbb{R}$, $t\in[0,2\pi]$,

ii. $\vec{r}(s,t)=\big(\sqrt{1+s^2}, s\cdot cos(t), s\cdot sin(t)\big)$, $s\in\mathbb{R}$, $t\in[0,2\pi]$,

iii. $\vec{r}(\phi_1,\phi_2)=\big((R_2+R_1 sin(\phi_1))cos(\phi_2), (R_2+R_1 sin(\phi_1))sin(\phi_2), R_1 cos(\phi_1)\big)$, $\phi_1,\phi_2\in[0,2\pi]$, כאן $R_2>R_1$. (למשטח הזה קוראים: torus)

(2) (א) נניח שהמשטח הינו גרף של פונקציה, $S=\{z=z(x,y),\ (x,y)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2\}$. תהי f פונקציה רציפה על S. הוכיחו: $\iint\limits_S fdS=\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy$.

(ב) נניח שהמשטח נתון בקואורדינטות גליליות, $S=\Big\{(r\cdot cos(\phi)), r\cdot sin(\phi), z(r,\phi),\ (r,\phi)\in\mathcal{D}\Big\}$. תהי f פונקציה רציפה על S. הוכיחו: $\iint\limits_S fdS=\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x(r,\phi),y(r,\phi),z(r,\phi))\sqrt{r^2+(\frac{\partial z}{\partial\phi})^2+r^2(\frac{\partial z}{\partial r})^2}dr\cdot d\phi$.

(ג) נניח שהמשטח נתון בקואורדינטות כדוריות, $S=\Big\{\vec{r}=\vec{r}(\theta,\phi),\ (\theta,\phi)\in\mathcal{D}\Big\}$. קבלו נוסחה דומה.

(ד) נניח שהמשטח הוא חלק של טורוס, משאלה 1.iii. $S=\Big\{\vec{r}=\vec{r}(\phi_1,\phi_2),\ (\phi_1,\phi_2)\in\mathcal{D}\Big\}$. קבלו נוסחה $\iint\limits_S fdS=\iint\limits_{\mathcal{D}} f\big(x(\phi_1,\phi_2),y(\phi_1,\phi_2),z(\phi_1,\phi_2)\big)\big(R+r\cdot sin(\phi_1)\big)r\cdot d\phi_1 d\phi_2$.

(ה) חשבו את שטח של המשטח i. $\left\{\begin{array}{l} z=2-x^2-y^2 \\ z\geq\sqrt{x^2+y^2}\end{array}\right.$, ii. $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\leq 1,\ 0<b\leq a\end{array}\right.$,

iii. טורוס משאלה 1.iii.

(ו) חשבו $\oiint\limits_S (x^2+y^2)dS$ כאשר S היא מעטפת של הגוף $\{\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1\}$.

(ז) חשבו את המסה של כליפה $\{x^2+y^2+z^2=r^2,\ -\frac{1}{2}\leq z\leq\frac{\sqrt{3}}{2},\ x\leq y\}$ בעלת צפיפות משטחית בכל נקודה השווה למרחק מהנקודה למישור xy.

(3) (א) נניח שהמשטח הינו גרף של פונקציה, $S=\{z=z(x,y),\ (x,y)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2\}$, והנורמל פונה כלפי מעלה, $\mathcal{N}_z>0$.

הוכיחו: $\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{\mathcal{D}} det\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ 1 & 0 & \partial_x z \\ 0 & 1 & \partial_y z\end{pmatrix}dxdy$.

(ב) נניח שהמשטח הינו חלק של ספרה, $S=\{r=const,\ (\phi,\theta)\in\mathcal{D}\}$, והנורמל פונה כלפי חוץ. נניח שהשדה הינו מהצורה $\vec{F}=f\cdot\vec{r}$. הוכיחו: $\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{\mathcal{D}} f\cdot r^3 sin(\theta)d\theta d\phi$.

(ג) נניח שהמשטח הינו חלק של גליל, $S=\{r=const,\ (\phi,z)\in\mathcal{D}\}$, והנורמל פונה כלפי חוץ.

הוכיחו: $\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}=\iint\limits_{\mathcal{D}}(F_x\cdot x+F_y\cdot y)d\phi dz$.

(ד) חשבו את שטף השדה $\vec{F}=(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$ דרך המשטח $\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$, עם נורמל חיצוני. (ודאו כי האינטגרל מתכנס, למרות התאפסות של מכנה.)

(4) יהיו $\vec{F}$, $\vec{G}$ שדות וקטוריים ו f פונקציה, כולם גזירים ברציפות פעמיים. הוכיחו:

i. $div(\vec{F}\pm\vec{G})=div(\vec{F})\pm div(\vec{G})$, ii. $rot(\vec{F}\pm\vec{G})=rot(\vec{F})\pm rot(\vec{G})$, iii. $div(rot(\vec{F}))=0$,

iv. $rot(grad(f))=0$, v. אם $\vec{F}=f\cdot\vec{r}$ אז $div(\vec{F})=\vec{r}\cdot grad(f)+3f$, vi. $grad(f^2)=2f\cdot grad(f)$,

vi. $div(grad(f))=\Delta(f)=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})(f)$,

(5) את האינטגרלים הבאים חשבו בכמה שיותר דרכים.

(א) חשבו את שטף השדה $\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^n}$ דרך המשטח $\{x^2+y^2+z^2=1\}$, עם נורמל חיצוני. (מה אומר כאן משפט גאוס?)

(ב) חשבו את שטף השדה $\vec{F}=ln(y^2+z^2+1)\hat{x}+\frac{e^x}{z^2+1}\hat{y}+(x-y-1)\hat{z}$ דרך המשטח $S=\{0\le z=\sqrt{x^2+y^2}\le 1\}\subset\mathbb{R}^3$, עם הנורמל החיצוני, $\mathcal{N}_z\le 0$.

(ג) חשבו את שטף השדה $\vec{F}=(3x-2y+z)\hat{x}+(2x+3y-z)\hat{y}+(x-3y+z)\hat{z}$ דרך המשטח $S=\Big\{|3x-2y+z|+|2x+3y-z|+|x-3y+z|\le 1\Big\}\subset\mathbb{R}^3$, עם הנורמל החיצוני. רמז: השתמשו במשפט גאוס. אחר כך החליפו קואורדינטות: $(s,t,u)=(3x-2y+z,2x+3y-z,x-3y+z)$.

(ד) יהי $\vec{F}=(0,x+1,0)$. חשבו את שטף השדה $rot(\vec{F})$, דרך המשטח $S=\{x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge-\sqrt{2}\}$, עם הנורמל החיצוני. (רמז: כדאי לחשב את $div(rot\vec{F})$.)

(ה) חשבו את שטף של השדה $\vec{F}=\frac{(x,y,z)}{r^3}$ דרך שפה של הגוף $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+(z+\frac{3}{4})^2\le 4 \\ x^2+y^2-z\ge 1 \end{array}\right\}$ עם הנורמל החיצוני.

(ו) יהי $\vec{F}=\big(y+cos(z^2),2x-ln(4+x^2y^2),x^3yz^2\big)$ שדה וקטורי. חשבו את $\iint\limits_S rot(\vec{F})d\vec{S}$ כאשר S הנו משטח $S=\{x^2+y^2+z^2=4^2,\ z\ge 0\}\subset\mathbb{R}^3$ עם הנורמל כלפי מעלה, $\mathcal{N}_z\ge 0$.

(ז) חשבו $\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=4}\frac{5xydxdy+4yzdydz-9xzdzdx}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ עם הנורמל החיצוני. (רמז: המכנה קבוע לאורך המשטח)

(ח) חשבו $\oiint\limits_S \vec{F}d\vec{S}$, כאשר $\vec{F}=\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $S=\{2008x^2+2009y^2+2010z^2=2011\}$, עם הנורמל החיצוני.
(רמז: כדי להשתמש במשפט גאוס צריכים "לסלק" את ראשית הצירים מהגוף)

(6) (א) יהי $\vec{\gamma}=\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=2RX, \\ x^2+y^2=2rx,\ z>0 \end{array}\right\}$, כאשר $0<r<R$, וכיוון המסילה הוא חיובי אם מסתכלים מנקודה $(0,0,+\infty)$. חשבו את צירקולצית שדה $\vec{F}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$ לאורך γ.

(ב) חשבו את צירקולצית השדה $\vec{F}=(z,x,y)$ לאורך העקום $\left\{\begin{array}{l} z=x^2-y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\}$ נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מנקודה $(0,0,+\infty)$.

(ג) חשבו את צירקולצית השדה $\vec{F}=(y^2-z^2,z^2-x^2,x^2-y^2)$, לאורך העקום $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$ נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מנקודה $(10,10,10)$.

(ד) חשבו את העבודה של שדה $\vec{F}=(y-z,z-x,x-y)$ לאורך העקום $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=R^2,\ R>0 \\ xsin(\alpha)+ysin(\beta)+zsin(\gamma)=0 \end{array}\right\}$, המכוון נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מנקודה $(+\infty,0,0)$. (כאן $0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$ קבועים.)

(ה) עבור עקומה $C=\{x^{10}+y^{100}+z^{1000}=2017,\ x-y+z=0\}$ בחרו כיוון וחשבו $\oint\limits_C\frac{ydz-zdy}{y^2+z^2}$.

(7) תהי f בעלת נגזרות חלקיות רציפות ב $\mathbb{R}^3$ כולו וכך שמתקיים: $\nabla(f)\ne 0$ בכל נקודה של משטח $S=\{f(x,y,z)=0\}$. נניח גם ש S הינו משטח קשיר וחסום. הוכיחו/הפריכו: $\iint\limits_S\nabla(f)d\vec{S}\ne 0$.