

# חדו"א 2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2017. תרגיל בית מס' 4.

(1) (א) עבור פונקציות הבאות בדקו: רציפות, נגזרות חלקיות, רציפות של נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות. (בכל הנקודות)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ii.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{i.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} \quad \text{iii.}$$

(ב) נגדיר פונקציה  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \ln(x^2 + y^2) : & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 : & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  מצאו את כל הערכים של  $\alpha$  שעבורם  $f(x, y)$  רציפה. מצאו את כל הערכים של  $\alpha$  שעבורם  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית.

(ג) תהי  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln|\frac{x}{y}|}{x-y}, & y \neq x \\ g(x), & y = x \end{cases}$  באילו נקודות  $x$  ניתן להגדיר  $g(x)$  כך ש  $f(x, y)$  תהיה רציפה (בנקודות אלו)? בעלת נגזרות חלקיות (מסדר ראשון)? דיפרנציאבילית?

(ד) תהי  $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y+z) - \sin(x+y-z)}{z}, & z \neq 0 \\ g(x, y), & z = 0 \end{cases}$  באילו נקודות  $(x, y)$  ניתן להגדיר  $g(x, y)$  כך ש  $f(x, y, z)$  תהיה רציפה (בנקודות אלו)? בעלת נגזרות חלקיות (מסדר ראשון)? דיפרנציאבילית?

(2) (א) הוכיחו כי פונקציה  $f(x, y) = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$  מקיימת:  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  עבור כל  $(x, y)$  בתחום הגדרתה.

(ב) נניח ש  $f(t)$  גזירה. הוכיחו כי פונקציה  $z(x, y) = e^y f(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$  מקיימת  $z(x, y) = xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$  בתחום הגדרתה.

(ג) נניח ש  $f(x, y, z)$  דיפרנציאבילית והומוגנית מסדר  $n$  (כלומר, מקיימת:  $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$ ) עבור כל  $t \in \mathbb{R}$ . הוכיחו כי  $x \partial_x f + y \partial_y f + z \partial_z f = n f$ .

(ד) נניח ש  $z(x, y)$  דיפרנציאבילית ומקיימת את המשוואה  $z(x, y) = y f(\frac{z}{y})$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = y f(\frac{z}{y})$  כגון  $f(t)$  גזירה. הוכיחו כי  $(x^2 - y^2 - z^2) \partial_x z + 2xy \partial_y z = 2xz$ .

(ה) תהי  $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ , כאשר  $g(t)$  גזירה. הוכיחו  $y \partial_x f - x \partial_y f = 0$ .

(ו) תהי  $\phi(x, y, z) = f(x^2 - 2y^3 + z^4)$ , כאשר  $f(t)$  פונקציה גזירה ברציפות עם נגזרת לא מתאפסת. הוכיחו כי  $\frac{y^2 z^3 \partial_x \phi + x z^3 \partial_y \phi + x y^2 \partial_z \phi}{f'(x^2 - 2y^3 + z^4)}$  הנו קבוע ומצאו את הקבוע.

(3) (א) מצאו נגזרת מכוונת של  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$  בנקודה  $M = (1, 1)$  בכיוון  $((\cos(\alpha), \sin(\alpha)))$ . באיזה כיוון הנגזרת המכוונת מקבלת את הערך הגדול/הקטן ביותר?

(ב) מצאו את כל הנקודות  $(x, y)$  שבהן הנגזרת המכוונת של  $f(x, y) = x^3 + y^3$  בכיוון  $(2, 1)$  מקבלת את הערך הגדול ביותר.

(ג) מצאו את הנגזרת המכוונת של  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  בנקודה  $M = (x_0, y_0)$  בכיוון שניצב לקו רמה של  $f(x, y)$ , ועובר דרך הנקודה  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

(ד) מצאו את כל הנקודות בהן נגזרת מכוונת של פונקציה  $f(x, y) = \sin(x)^2 + \cos(y)^2$  בכיוון  $(2, 1)$  מקבלת את הערך הקטן ביותר.

(ה) תהי  $f(x, y, z) = \arcsin(\sqrt{\frac{xz}{y^2}})$ . הוכיחו כי  $x \partial_x f + y \partial_y f + z \partial_z f$  הנו קבוע ומצאו את הקבוע הזה. מצאו את הכוון של העלייה התלולה (החזקה) ביותר ואת הכוון של הירידה התלולה (החזקה) ביותר של  $f(x, y, z)$  בנקודה  $(3, 4, 5)$ .

(ו) תהי  $f(x, y)$  פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות. נתון:  $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(-3,6)} = -2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(-3,6)} = 1$ . נגדיר  $\phi(u, v, w) = f(u^2 - v^2, u^2 v w)$ . חשבו מכפלה סקלרית של  $grad(\phi)|_{(1,2,3)}$  בווקטור  $(1, 1, 1)$ .