חדו"א2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2017. תרגיל בית מס' 5.

(1) עבור פונקציה $g(x,y)$ ידוע ש $g'_x(1,1)=\frac{2}{3}$. נגדיר פונקציה $f(t)=g(e^t,cos(t))$.
(א) חשבו $f'(0)$.
(ב) נתון גם ש $g''_{xx}(1,1)=\frac{2}{3}$, $g'_y(1,1)=\frac{4}{3}$. חשבו $f''(0)$.

(2) (א) תהי $f(x,y)=ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+x^2-2y^2$. הוכיחו כי $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ הנו קבוע ומצאו את הקבוע הזה.
(ב) במקרים הבאים, האם פונקציה רציפה ב $(0,0)$? דיפרנציאבילית ב $(0,0)$? מקיימת $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$?
i. $f(x,y)=\begin{cases} x^2\cdot arctan\frac{y}{x}-y^2\cdot arctan\frac{x}{y}, & x\cdot y\neq 0\\ 0, & x\cdot y=0\end{cases}$,
ii. $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}: & (x,y)\neq(0,0)\\ 0: & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

(3) (א) חשבו בקירוב (הקירוב עד לסדר ראשון) $\sqrt{5e^{0.02}+2.03^2}$.
(ב) פתחו לפולינום טיילור עד סדר 2 בנקודה $(0,0)$:
i. $ln(1+x)ln(1+y)$, ii. $arctan(\frac{x+y}{1+xy})$, iii. $\frac{sin(x)-sin(y)}{e^x+e^y}$.
(ג) רשמו פיתוח טיילור עד סדר שלישי בנקודה $(0,0)$: i. $f(x,y)=\frac{1}{1-x-y}$, ii. $f(x,y)=cos(x^2+y^2)$,
iii. $f(x,y)=ln(1+2x+y)$, iv. $f(x,y)=sin(x)cos(y)$.

(4) (א) נתונה משוואה $e^{x+z}=(x+y^2)(x+z)+1$. בדקו כי המשוואה מגדירה בסביבת הנקודה $(x,y)=(-1,1)$ פונקציה $z(x,y)$ המקיימת $z(-1,1)=1$. מצאו את הנגזרות $z_x(-1,1)$, $z_y(-1,1)$. האם הפונקציה עולה בכיוון מנקודה $(-1,1)$ לנקודה $(1,2)$?
(ב) נניח שמשוואה $F(x,y)=0$ מגדירה פונקציות גזירות $y(x)$, $x(y)$. הוכיחו/הפריכו: $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1$.
(ג) נניח שמשוואה $F(x,y,z)=0$ מגדירה פונקציות גזירות $y(x,z)$, $z(x,y)$, $x(y,z)$. הוכיחו: $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=-1$.
(ד) נתון שלכל נקודה $x\in\mathbb{R}$ למשוואה $x=3y-2sin(y)$ קיים פתרון יחיד. הוכיחו כי המשוואה מגדירה את פונקציה גזירה $y(x)$. חשבו $y'(x)$, $y''(x)$. מצאו תחומי עליה/ירידה ונקודות קיצון (אם קיימות) של $y(x)$.
(ה) הוכיחו כי למשוואה $e^{y-1}+ln(y)+x^3=1$ קיים פתרון גזיר $y(x)$ המוגדר בסביבה של $x_0=0$ ומקיים $y(0)=1$. הוכיחו כי $y'(0)=0=y''(0)$. מיינו את נקודת הקיצון $x=0$ של $y(x)$.

(5) (א) מצאו את כל הישרים המשיקים לעקום $x^2-y^2=1$ שעוברים דרך נקודה $(2,0)$.
(ב) מצאו את כל הנקודות שבהן העקומות משיקות (כלומר המשיקים שלהם מתלכדים):
i. $\{y=cos(x)\}\subset\mathbb{R}^2$ ו $\{y=cos(\frac{x}{3})\}$ ii. $\{y=(x-1)^2\}\subset\mathbb{R}^2$ ו $\{(x-1)^2+(y-1)^2=1\}$
(ג) תהי (x_0,y_0) נקודה על העקום $\{xy=1,\ x>0,\ y>0\}$. יהי l הישר המשיק לעקום בנקודה (x_0,y_0). חשבו את שטח המשולש החסום ע"י l וצירי קואורדינטות. (הוכיחו כי השטח לא תלוי בבחירת הנקודה (x_0,y_0).)
(ד) מצאו את כל הישרים המשיקים גם לעקום $x-y^2=a$, $a>0$ וגם לעקום $x+y^2=-b$, $b>0$.

(6) (א) מצאו את כל הנקודות של המשטחים הבאים שבהן המישור המשיק מאונך לציר $\hat{y}$.
i. $\{z^2-y^2+x^2=10\}$, ii. $\{sin(x)+sin(y)+sin(z)=1\}$.
(ב) תהי (x_0,y_0,z_0) נקודה של משטח $\{x^a+y^a+z^a=1\}$, $x>0$, $y>0$, $z>0$. יהי P המישור המשיק בנקודה. חשבו את נפח הפירמידה חסומה ע"י המישורים P, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
(ג) תהי (x_0,y_0,z_0) נקודה של המשטח $\{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a},\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$. יהי P המישור המשיק בנקודה. נתבונן בנקודות החיתוך של P עם צירי הקואורדינטות: $(a_x,0,0)$, $(0,a_y,0)$, $(0,0,a_z)$. הוכיחו כי מספר $a_x+a_y+a_z$ הנו קבוע (לא תלוי בבחירה של (x_0,y_0,z_0)).
(ד) נתבונן במשטחים $\{x^2+y^2+z^2=r_0^2\}$, $\{y=xtan(\phi_0)\}$, $\{x^2+y^2=z^2tan(\theta_0)\}$. (כאן r_0,ϕ_0,θ_0 הם קבועים.) הוכיחו שכל שני המשטחים ניצבים בכל נקודות החיתוך שלהם.