

חזר"א 2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2017. תרגיל בית מס' 6.

- (1) (א) מצאו ומיינו את כל נקודות הקיצון (ב \mathbb{R}^2) של הפונקציות הבאות:
i. $f(x, y) = e^{x+y} + e^{-x} + e^{-y}$. ii. $f(x, y) = |3x| + x^4 y^2$. iii. $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.
iv. $f(x, y) = \sin(x) - \cos(y)$.
(ב) הוכיחו כי לפונקציה $f(x, y) = (1 + e^y)\cos(x) - ye^y$ יש אינסוף נקודות מקסימום (מקומי) ואינסוף נקודות אוסף, אך אין אף נקודת מינימום.
(ג) תהי $f(x, y) = g_1(x) + g_2(y)$. הוכיחו כי (x_0, y_0) היא נקודת max של $f(x, y)$ אם x_0 היא נקודת max של $g_1(x)$ ו y_0 היא נקודת max של $g_2(y)$. נסחו והוכיחו טענות מתאימות לגבי נקודת min ונקודת אוסף.
(ד) תהי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית. נניח שעבור כל ישר l העובר דרך $(0, 0)$, הנקודה היא מינימום מקומי של הצמצום $|f(x, y)|_l$. האם זה מבטיח ש $(0, 0)$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x, y)$?

- (2) מצאו את נקודות min/max של $f(x, y)$ בתחום D :
(א) $f(x, y) = xy$, $a > 0$, $D = \{|x|^a + |y|^a \leq 1\}$
(ב) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$, $D = \{x \geq 0, y \geq 0, 3y^2 \geq 2x^3, 3x^2 \geq 2y^3\}$
(ג) $f(x, y) = 3 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2$, $D = \{x^2 + y^2 - 2x + 2y \leq -1\}$
(ד) $f(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$, $D = \{|x| + |y| \leq 1\}$
(ה) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, $D = \{|z| \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$
(ו) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $D = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ ($a > b > c > 0$)
(ז) $f(x, y) = 3 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2$, $D = \{x^2 + y^2 - 2x + 2y \leq -1\} \subset \mathbb{R}^2$
(ח) $f(x, y) = e^{x^2 + 3y^2}$, $D = \{4x^2 + y^2 \leq 1\}$
(ט) $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$, $D = \{16x^2 + 9y^2 \leq \pi, x + y \geq 0\}$
(י) $f(x, y) = x^3 - 2x + 2xy^2$, $D = \mathbb{R}^2$ או $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$
(יא) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{xy}{8} + \frac{1}{y}$, $D = \mathbb{R}^2$ או $D = \{0 < x \leq 4, 0 < y \leq 4, xy \geq 1\}$

- (3) הוכיחו כי למשוואה $2xy + y^2 z + 4e^z = 0$ יש פתרון יחיד ודיפרנציאבילי $z(x, y)$ המוגדר בסביבה של $(x_0, y_0) = (1, -2)$ ומקיים $z(x_0, y_0) = 0$. מצאו את הערך הקטן/הגדול ביותר של הנגזרת הכיוונית $\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}|_{(1, -2)}$.

- (4) (א) מצאו את המרחק (הקטן ביותר) בין העקומות: $\{z = ax, y = 0\}$, $\{y = x^2 + c, z = 0\}$.
(ב) מצאו את המרחק (הקטן ביותר) בין נקודה P לעקום C במקרים הבאים:
i. $C = \{y^2 + x^2 - 2x = -1\} \subset \mathbb{R}^2$, $P = (0, 1)$. ii. $C = \{x^4 + y^4 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, $P = (0, 0)$.
(ג) מצאו את הנקודות על משטח $S = \{x^a y^b z^c = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ הקרובות ביותר לראשית הצירים.
(ד) מצאו על העקום $7x^2 + 8xy + y^2 = 45$ את הנקודות הקרובות ביותר לראשית הצירים.