חדו"א2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2017. תרגיל בית מס' 7.

(1) (א) ציירו את תחומי האינטגרציה והחליפו את סדר האינטגרציה באינטגרלים הבאים

i. $\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+2} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{2-2x} f(x,y)dy$, ii. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{2x} f(x,y)dx + \int_{1}^{5} dx \int_{0}^{\sqrt{5-x}} f(x,y)dx$,

iii. $\int_{-1}^{1} dy \int_{arcsin(y)}^{\pi - arcsin(y)} f(x,y)dx$.

(ב) חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: כדאי להחליף את סדר אינטגרציה)

i. $\int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt[4]{1-y^4}}^{\sqrt[4]{1-y^4}} ye^{x^2}dx$, ii. $\int_{1}^{e} dx \int_{0}^{ln(x)} \frac{dy}{e^y+1}$, iii. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{arccos(y)} \frac{dx}{sin(x)+10}$

(2) (א) מצאו את החלפת קואורדינטות, $(x,y) \to (s,t)$, אשר מעבירה את התחומים הבאים למלבן. ציירו את התחומים בצירי קואורדינטות החדשים. בכל אחד מהמקרים בדקו כי ההעתקה הפיכה וחשבו את היעקוביאן.

i. $\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x \le y \le x+1, \\ -x \le y \le 1-x \end{array} \right\}$, ii. $\mathcal{D} = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$, iii. $\mathcal{D} = \{(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 3\}$,

iv. $\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \le y \le x^2+1, \\ 0 \le x \le 2 \end{array} \right\}$, v. $\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \le y \le 2x^2, \\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x} \end{array} \right\}$.

(ב) חשבו את האינטגרלים הבאים

i. $\iint_{\left\{ \substack{1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x \le y \le x\sqrt{3}} \right\}} arctan\frac{y}{x} dxdy$, ii. $\iint_{\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$, iii. $\iint_{\left\{ \substack{x \le y \le 2x, \\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}} \right\}} |xy|dxdy$,

iv. $\iint_{\left\{ \substack{x^2 \le y \le 2x^2, \\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}} \right\}} x|y|dxdy$, v. $\int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} e^{x^2+y^2}dy$, vi. $\iint_{\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}, \\ 3x \le y \le 5x \end{array} \right\}} \sqrt{|\frac{y}{x}|} dxdy$,

vii. $\int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{sin(\sqrt{x^2+y^2})dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (האם פונקציה $\frac{sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$ רציפה וחסומה בתחום האינטגרציה?)

(3) בהינתן החלפת משתנים $(x,y) \to (s(x,y), t(x,y))$ וההחלפה הפוכה $(s,t) \to (x(s,t), y(s,t))$, הוכיחו: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \mathbb{I}_{2\times 2}$.

(4) מצאו את שטח התחומים החסומים ע"י עקומות הבאות

i. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, ii. $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$, iii. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, iv. $|2x-y| + |2y-x| = 1$

v. $\left\{ \begin{array}{l} 0 \le r \le cos(\phi), \\ 0 \le r \le sin(\phi) \end{array} \right\}$, vi. $\left\{ \begin{array}{l} ay \le x^2 \le by, \\ cx \le y^2 \le dx \end{array} \right\}$ (כאן: $0 < a < b,\ 0 < c < d$),

vii. $\{x^4 + y^4 \le x^2 + y^2\}$ viii. $\sqrt{x^2+y^2} = |sin(n \cdot arctan\frac{y}{x})|$, $n \in \mathbb{N}$ (רמז: כדאי לעבור לקוטביות ולוודא כי התחום הוא פרח בעל $2n$ עלי כותרת.)

(5) חשבו את הנפח של הגופים הבאים:

i. $\{ax^2+by^2+cz^2 \le 1\}$, $a,b,c > 0$ ii. $\{x^2+y^2 \le 1, z^2 \le x^2+y^2, z \le ax^2+by^2\}$, $\frac{1}{2} \ge a,b \ge 0$,

iii. $\{x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x^2+y^2 \le R^2,\ z \le xy\}$, iv. $\{x^2+y^2+z^2 \le 1,\ (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \le \frac{1}{4}\}$.