חדו"א 2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2017. תרגיל בית מס' 9.

(1) חשבו את האינטגרלים הבאים i. $\int_{\{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\}} (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$ ii. $\int_{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)} |y|ds$, iii. $\int_{y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}} \frac{ds}{y^2}$,
iv. $\int_{[p,q]} \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, $[p,q]$ הינו קטע ישר מ $p=(0,0)$ ל $q=(1,2)$, v. $\int_{\substack{\vec{r}(t)=cos(2t)\hat{x}+sin(2t)\hat{y}+t\hat{z} \\ t\in[0,2\pi]}} (x^2+y^2+z^2)ds$.

(2) (א) חשבו את האורך של עקומות הבאות:
i. $\vec{r}(t)=(2acos(t)-acos(2t))\hat{x}+(2asin(t)-asin(2t))\hat{y}$, $t\in[0,2\pi]$,
ii. $\vec{r}(t)=\sqrt{t}sin(t)\hat{x}+\sqrt{t}cos(t)\hat{y}+t\hat{z}$, $t\in[1,4]$.
(ב) עבור אילו ערכים של $s>0$ לעקום יש עורך סופי?
i. $\{r(\theta)=\frac{1}{1+\theta^s},\ 0\le\theta<\infty\}$, ii. $\{x=e^{-t}cos(t),\ y=e^{-t}cos(t),\ z=t^{-s},\ 1<t<\infty\}$.
(ג) חשבו את המסה של השרשרת $\vec{r}(t)=asin(t)\hat{x}+acos(t)\hat{y}+bt\hat{z}$, $t\in[0,2\pi]$, אם צפיפות בכל נקודה שווה לריבוע המרחק מהנקודה לראשית.

(3) במקרים הבאים חשבו את העבודה של שדה $\vec{F}$ לאורך המסילה γ, מנקודה P לנקודה Q:
i. $\vec{F}=\left(e^x sin(y)-my, e^x cos(y)-m\right)$, $\gamma=\{x^2+y^2=2x,\ y\ge 0\}$, $P=(0,0)$, $Q=(2,0)$.
ii. $\vec{F}=\left((e^x sin(y)-y+1),(e^x cos(y)-1)\right)$, $\gamma=\{x^2+y^2=2x,\ y\ge 0\}$, $P=(0,0)$, $Q=(2,0)$.
iii. $\vec{F}=\left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$, $\gamma=\{(x-3)^2+(y-2)^2=1,\ y\ge 2\}$, $P=(4,2)$, $Q=(2,2)$.
iv. $\vec{F}=\left(\frac{2x(2-e^y)}{(1+x^2)^2},\frac{e^y}{1+x^2}+3y\right)$, $\gamma=\{x^2+y^2=1,\ y\ge 0\}$, $P=(1,0)$, $Q=(-1,0)$.
v. $\vec{F}=(|x|,|y|)$, $\gamma=\{x^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{5}{6}}=1,\ x,y\ge 0\}$, $P=(1,0)$, $Q=(0,1)$.

(4) במקרים הבאים ברירת מחדל: כיוון המסילה הוא נגד כיוון השעון
(א) i. $\oint_{\{x^2+y^2=36\}} \left((e^{x^2}-x^2y)dx+(xy^2-e^y)dy\right)$,
ii. $\int_{\left\{\substack{x^2+z^2=1, \\ y=\sqrt{\pi}}\right\}} (z^2dx+3y^2dy-x^2dz)$ כיוון של עקומה מתאים לתנועה מ $(1,\sqrt{\pi},0)$ ל $(0,\sqrt{\pi},1)$.
(ב) חשבו את העבודה של שדה $\vec{F}=\left(\frac{1}{x}arctan\frac{y}{x},\frac{2}{y}arctan\frac{x}{y}\right)$ לאורך המסילה המורכבת מקשתות $\{x^2+y^2=4,\ y>0\}$, $\{x^2+y^2=1,\ y>0\}$, $\{y=x,\ y>0\}$, $\{y=3x,\ y>0\}$.
(ג) (רמז: במקרים הבאים השתמשו במשפט גרין כדי להחליף את המסילה המקורית במסילה נוחה יותר.)
i. $\oint_{\{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1\}} \left(\frac{xdy}{x^2+y^2}-\frac{ydx}{x^2+y^2}\right)$, ii. $\oint_{\{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\}} \frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, iii. $\int_{\substack{y=tan(x) \\ \frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3}}} \left(\frac{y}{x^2}dx-\frac{dy}{x}\right)$

(5) השתמשו בנוסחת גרין כדי לחשב את השטח החסום ע"י:
i. $\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$, ii. $\{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\}$, iii. $\left\{\begin{array}{l} x=a\cdot sin^3(t),\ y=b\cdot cos^3(t), \\ 0\le t\le 2\pi,\quad a,b>0\end{array}\right\}$.
iv. $\left\{\vec{r}(t)=(t^2-1)\hat{x}+t(t^2-1)\hat{y},\quad t\in[-1,1]\right\}$.

(6) מצאו עקומה סגורה פשוטה γ עבורה האינטגרל $\oint_{\gamma}(\frac{x^2y}{4}+\frac{y^3}{3})dx+xdy$ מקבל את הערך הגדול ביותר.

(7) במקרים הבאים בדקו האם שדה $\vec{F}$ משמר בתחום $\mathcal{U}$, ואם כן, מצאו את הפוטנציאל.
i. $\vec{F}=e^y(\hat{x}+x\hat{y})$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2$, ii. $\vec{F}=\frac{y\hat{x}+x\hat{y}}{1+x^2y^2}$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2$, iii. $\vec{F}=\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{x^2+y^2}$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,
iv. $\vec{F}=\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{x^2+y^2}$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\ x\ge 0\}$, v. $\vec{F}=\frac{-x\hat{x}+y\hat{y}}{(x^2+y^2)^2}$, $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\ x\ge 0\}$.

(8) האם קיימת מסילה γ סגורה (מכוונת) שלא עוברת דרך הראשית, עבורה האינטגרל $\oint_{\gamma}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ שווה ל:
i. 0, ii. $\pm\pi$, iii. $\pm 2\pi$, iv. $\pm 6\pi$.