חדו"א וקטורי להנדסת חשמל
מועד א'

תאריך הבחינה: 01/02/2018
שם המרצים: **י. אופנהיים, א. חסון, ד. קרנר**
שם הקורס: **חדו"א וקטורי להנדסת חשמל**
מספר הקורס: 201.1.9631
שנה: 2017/8 סמסטר: **סתיו** מועד: **א'**
חומר עזר: אין.

קראו בעיון את ההנחיות הכלליות ואת ההנחיות של כל חלק בטרם תגשו לענות על הבחינה.

הנחיות כלליות: תוכלו להשתמש בכל טענה שנלמדה בכיתה, בתרגול או בעבודות הבית. בכל עת שאתם עושים זאת, צטטו במדויק את הטענה בה אתם עושים שימוש, והסבירו כיצד אתם משתמשים בה.

בכל שאלה/סעיף תוכלו לבחור בתשובה "אני לא יודע/ת", שתזכה אתכם ב־20% (מעוגלים למספר השלם הקרוב) מן הציון עבור אותה שאלה.

כתבו את תשובותיכם בגוף השאלון. אם המקום המוקצה לכתיבת התשובה אינו מספיק לכם, תוכלו להמשיך את התשובה בגב הטופס, אך ציינו זאת בברור. לתשומת לבכם, דפי הטיוטה ישלחו ישירות לגריסה, ולא יבדקו.

מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 105.

סימונים

1. אם $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אז $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ הוא השדה הוקטורי שמסומן גם (P,Q) או $P(x,y)\hat{\mathbf{i}}+Q(x,y)\hat{\mathbf{j}}$. הסימון לשדות וקטורים במימדים גבוהים יותר הוא אנלוגי.
2. אם $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ הוא שדה וקטורי אז curlF הוא הרוטור של F, המסומן גם rotF או $\nabla\times F$.
3. בקו־אורדינטות כדוריות, r הוא אורך הוקטור v, φ הזוית שיוצר הוקטור v עם ציר z, ו־ θ הזוית שיוצרת ההטלה של הוקטור v על מישור xy עם ציר x.
4. אם $f:\mathbb{R}^n\to R$ אז f_{x_i} היא הנגזרת החלקית של f לפי המשתנה x_i, המסומנת גם $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ או f'_{x_i}.
5. מטריצת יעקובי של פונקציה f בנקודה a מסומנת $D_f(a)$ או $J_f(a)$.

נכון/לא נכון

ענו על השאלות הבאות. משקל כל שאלה 10 נק'. בכל שאלה קבעו האם הטענה נכונה או לא, והוכיחו את טענותיכם. אורך תשובתכם לא יעלה על חמש שורות.

1. (10 נק') יהיו $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום אינטגרציה ו־ $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ פונקציה $\mathcal{C}^1$ כך שקיימת פונקציה $f : \Omega \to \mathbb{R}$ עבורה מתקיים

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 2f(x) - 1 & 3f(x) + 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

לכל $x \in \Omega$. אזי $5V(\Omega) = V(g(\Omega))$ כאשר $V(\Omega)$, $V(g(\Omega))$ הם השטחים של Ω, $g(\Omega)$ בהתאמה.

2. (10 נק') תהי $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ פונקציה $\mathcal{C}^2$. אזי מטריצת יעקובי, $D_f(x)$, היא מטריצה סימטרית לכל x.

3. (10 נק') יהי $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ שדה $\mathcal{C}^1$ משמר מקומית. נניח ש־ f שדה משמר בטבעת $1 < ||x|| < 2$. אזי f משמר בכל תחום הגדרתו.

שאלות פתוחות

ענו על שלוש השאלות הבאות.

1. (א) (7 נק') הגדירו מתי פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ היא דיפרנציאבילית בנקודה $x_0\in\mathbb{R}^2$.

(ב) (9 נק') הוכיחו ישירות מן ההגדרה כי הפונקציה

$$f(x,y):=\begin{cases}\frac{\sin(x)y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

דיפרנציאבילית ב־ $(0,0)$.

(ג) (9 נק') הוכיחו כי הפונקציה

$$e^{x^3+y^2+z^2+z+5}$$

מקבלת מינימום גלובלי על הגליל $x^2+y^2=1$ ומצאו את הנקודה (או הנקודות) בה מתקבל המינימום.

2. יהי

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-y)^2 + (x+y)^2 \le z \le \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2}\right\}.$$

(א) (10 נק') הוכיחו כי Ω הנה קבוצה קומפקטית.

(ב) (15 נק') חשבו את האינטגרל

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz\ .$$

3. (א) (10 נק') תהי $f(x,y) = x^8 + 3x^4y^3 + y^7x^{20} + y$. הראו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ למשוואה $f(x,y) = 0$ יש פתרון אחד ויחיד.

(ב) (9 נק') לכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר $\phi(x)$ הפתרון היחיד של $f(x,y) = 0$ מן הסעיף הקודם. הוכיחו כי הפונקציה $\phi(x)$ היא $\mathcal{C}^1$ בכל הישר הממשי וחשבו את נגזרתה שלה בנקודה 0.

(ג) (6 נק') תהי $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ספירת היחידה. תהי U קבוצה פתוחה המכילה את כדור היחידה הסגור סביב הראשית. יהי $F : U \to \mathbb{R}^3$ שדה וקטורי חלק. נניח שקיימת פונקציה $c : S^2 \to \mathbb{R}_{>0}$ (חלקה) כך ש־ $F(x) = c(x)x$ לכל $x \in S^2$. הוכיחו שיש נקודה $x_0 \in U$ כך ש־ $\mathrm{div}F(x_0) \neq 0$.

בהצלחה!