חדו"א וקטורי להנדסת חשמל
מועד א'

תאריך הבחינה: 01/02/2018
שם המרצים: **י. אופנהיים, א. חסון, ד. קרנר**
שם הקורס: **חדו"א וקטורי להנדסת חשמל**
מספר הקורס: 201.1.9631
שנה: 2017/8 סמסטר: **סתיו** מועד: **א'**
חומר עזר: אין.

קראו בעיון את ההנחיות הכלליות ואת ההנחיות של כל חלק בטרם תגשו לענות על הבחינה.

הנחיות כלליות: תוכלו להשתמש בכל טענה שנלמדה בכיתה, בתרגול או בעבודות הבית. בכל עת שאתם עושים זאת, צטטו במדויק את הטענה בה אתם עושים שימוש, והסבירו כיצד אתם משתמשים בה.

בכל שאלה/סעיף תוכלו לבחור בתשובה "אני לא יודע/ת", שתזכה אתכם ב־20% (מעוגלים למספר השלם הקרוב) מן הציון עבור אותה שאלה.

כתבו את תשובותיכם בגוף השאלון. אם המקום המוקצה לכתיבת התשובה אינו מספיק לכם, תוכלו להמשיך את התשובה בגב הטופס, אך ציינו זאת בברור. לתשומת לבכם, דפי הטיוטה ישלחו ישירות לגריסה, ולא יבדקו.

מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 105.

סימונים

1. אם $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אז $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ הוא השדה הוקטורי שמסומן גם (P,Q) או $P(x,y)\hat{\mathbf{i}}+Q(x,y)\hat{\mathbf{j}}$. הסימון לשדות וקטורים במימדים גבוהים יותר הוא אנלוגי.
2. אם $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ הוא שדה וקטורי אז $\mathrm{curl F}$ הוא הרוטור של F, המסומן גם $\mathrm{rot F}$ או $\nabla\times F$.
3. בקו־אורדינטות כדוריות, r הוא אורך הוקטור v, φ הזוית שיוצר הוקטור v עם ציר z, ו־ θ הזוית שיוצרת ההטלה של הוקטור v על מישור xy עם ציר x.
4. אם $f:\mathbb{R}^n\to R$ אז f_{x_i} היא הנגזרת החלקית של f לפי המשתנה x_i, המסומנת גם $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ או f'_{x_i}.
5. מטריצת יעקובי של פונקציה f בנקודה a מסומנת $D_f(a)$ או $J_f(a)$.

נכון/לא נכון

ענו על השאלות הבאות. משקל כל שאלה 10 נק'. בכל שאלה קבעו האם הטענה נכונה או לא, והוכיחו את טענותיכם. אורך תשובתכם לא יעלה על חמש שורות.

1. (10 נק') יהיו $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום אינטגרציה ו־ $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ פונקציה $\mathcal{C}^1$ כך שקיימת פונקציה $f : \Omega \to \mathbb{R}$ עבורה מתקיים

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 2f(x) - 1 & 3f(x) + 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

לכל $x \in \Omega$. אזי $5V(\Omega) = V(g(\Omega))$ כאשר $V(\Omega)$, $V(g(\Omega))$ הם השטחים של Ω, $g(\Omega)$ בהתאמה.

תשובה: נכון. ממשפט שינוי המשתנה

$$\iint_\Omega |J_g| = \iint_{g(\Omega)} 1$$

ומשום ש־ $|J_g| = |6f - 3 - 6f - 2| = 5$ התשובה נובעת. בתשובתכם –– כפי שנדרשתם בהנחיות –– עליכם לנסח את משפט שינוי המשתנה, ולהשתמש בו נכונה. שימו לב: שינוי המשתנה משנה את תחום האינטגרציה.

2. (10 נק') תהי $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ פונקציה $\mathcal{C}^2$. אזי מטריצת יעקובי, $D_f(x)$, היא מטריצה סימטרית לכל x.

תשובה: לא נכון, למשל $f(x, y, z) = (x, x, 1)$.

הערה: ע"מ לסתור את הטענה יש להביא דוגמה נגדית. על דוגמה כזו להיות שדה וקטורי כבנתון. שימו לב שאת מטריצת ההסיאן הגדרנו רק לשדות סקלרים (שאינם רלוונטים לשאלה זו).

3. (10 נק') יהי $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ שדה $\mathcal{C}^1$ משמר מקומית. נניח ש־ f שדה משמר בטבעת $1 < ||x|| < 2$. אזי f משמר בכל תחום הגדרתו.

תשובה: נכון. על מנת להוכיח שהשדה הוא משמר מספיק שלכל מסילה סגורה γ בתחום מתקיים $\oint_\gamma f \cdot d\gamma = 0$. ראשית, נשים לב שההנחה ש־ f משמר בטבעת נובע ש־ $\oint_{\gamma_{1.5}} f = 0$ כאשר γ_ϵ המעגל ברדיוס ϵ סביב הראשית. מכיוון שהשדה משמר מקומית, ממשפט גרין $\oint_{\gamma_\epsilon} f = \oint_{\gamma_{1.5}} f = 0$ לכל $\epsilon > 0$. לכן, מאותו הטיעון, הטענה נובעת לכל מסילה פשוטה סגורה: אם המסילה אינה מקיפה את הראשית האינטגרל הוא 0 ישירות ממשפט גרין. אם המסילה מקיפה את הראשית נמצא $\epsilon > 0$ כך ש־ γ_ϵ מוכלת בפנים של המסילה (למה יש כזו?) ונשתמש באותו הטיעון שלעיל. זה מספיק (מדוע?).

שאלות פתוחות

ענו על שלוש השאלות הבאות.

1. (א) (7 נק') הגדירו מתי פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ היא דיפרנציאבילית בנקודה $x_0\in\mathbb{R}^2$.

תשובה: אם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך ש־

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x)-T(h)}{||h||}=0\,.$$

הערה: הדרישה שהנגזרות החלקיות של f קיימות אינה מספיקה. הדרישה שהן קיימות ורציפות בסביבה של x_0 אינה הכרחית –– ובכל מיקרה אינה ההגדרה.

(ב) (9 נק') הוכיחו ישירות מן ההגדרה כי הפונקציה

$$f(x,y):=\begin{cases}\frac{\sin(x)y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

דיפרנציאבילית ב־ $(0,0)$.

תשובה: חישוב ישיר מן ההגדרה יראה כי הנגזרות החלקיות של f מתאפסות בראשית. לכן, ניקח (בסימונים של הסעיף הקודם) $T=0$. עלינו להראות, אם כן, ש־

$$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{\sin(x)y^2}{x^2+y^2}=0$$

אז נחשב:

$$\lim_{(x,y)\to 0}\left|\frac{\sin(x)}{x}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|=\lim_{(x,y)\to 0}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right||x|\leq\lim_{(x,y)\to 0}|x|=0$$

משום ש־ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ ו־ $\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1$.

(ג) (9 נק') הוכיחו כי הפונקציה

$$e^{x^3+y^2+z^2+z+5}$$

מקבלת מינימום גלובלי על הגליל $x^2+y^2=1$ ומצאו את הנקודה (או הנקודות) בה מתקבל המינימום.

תשובה: ראשית, נשים לב שמשום ש־ e^t פונקציה מונוטונית עולה, יספיק למצוא נקודות קיצון לפונקציה $x^3+y^2+z^2+z+5$ תחת האילוץ. נשים לב עוד, שמשום שהאילוץ אינו תלוי ב־ z מינימום מקומי של הפונקציה יתקבל רק כאשר z^2+z מזערי (אחרת נוכל למזער ביטוי זה ולהקטין את ערך פונקצית המטרה, מבלי לצאת מן האילוץ. כיוון ש־ z^2+z היא פרבולה יש לה מינימום גלובלי בנקודה $z=-\frac{1}{2}$. עתה נבדוק האם לפונקציה x^3+y^2 יש מינימום תחת האילוץ $x^2+y^2=1$. משום ש־ y^2 תמיד חיובי ו־ x^3 שלילי עבור $x<0$ נרצה לקחת את x קטן ככל האפשר (שלילי), ואת $|y|$ קטן ככל האפשר.

כיוון שהאילוץ גורר ש־ $-1\leq x,y\leq 1$ ברור ש־ $|x^3+y^2|\leq 1$ ואם נציב $x=-1$ ו־ $y=0$ נקבל -1, שהוא –– לפי מה שאמרנו עכשיו –– בהכרח מינימום גלובלי. לכן $(-1,0,-\frac{1}{2})$ נקודת מינימום גלובלית.

הערות: אפשר למצוא את הפתרון גם בשימוש בכופלי לגרנז', אבל אז חשוב לנמק מדוע הנקודה שמצאתם היא מינימום גלובלי. הסיבה היא ש־ $f\to\infty$ כאשר $|z|\to\infty$, ולכן עבור $|z|>r$ מספיק גדול

$$f(x,y,z) > f(-1,0,1)$$

ו־ f מקבלת מינימום גלובלי על $x^2+y^2=1\&|z|\leq r$ שהיא קבוצה קומפקטית. יש לשים לב שהגליל עצמו אינו חסום, ולכן אינו קבוצה קומפקטית. במילים אחרות $\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$ היא קבוצה סגורה וחסומה במישור, אבל $\{(x,y,z):x^2+y^2\leq 1\}$ אינה חסומה ב־ $\mathbb{R}^3$. אפשר גם לפתור את השאלה בעזרת הצבה $y^2=1-x^2$ אלא שאז יש לשים לב ש־ $|x|\leq 1$ ויש לבדוק גם את נקודות הקצה $x=\pm 1$.

לבסוף נזכיר כי הערכים העצמיים של מטירצת ההסיא מסייעים בסיווג נקודות קיצון רק בנקודות קריטיות, ולכן אינם רלוונטים לסיווג נקודות קיצון תחת אילוץ.

2. יהי

$$.\Omega:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x-y)^2+(x+y)^2\leq z\leq\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2}\right\}$$

(א) (10 נק') הוכיחו כי Ω הנה קבוצה קומפקטית.

תשובה: עלינו להראות ש־ Ω סגורה וחסומה. נכתוב $u=x-y$ ו־ $v=x+y$. **יספיק** להוכיח (מדוע?) ש־ $\{(u,v,z):u^2+v^2\leq z\leq\sqrt{u^2+v^2}$ היא סגורה וחסומה. לגבי סגירות: אם $(u_n,v_n,z_n)\to(u,v,z)$ סדרה ב־ Ω אז $u_n^2+v_n^2\leq z_n\leq\sqrt{u_n^2+v_n^2}$ ומרציפות נובע

$$u^2+v^2=\lim u_n^2+\lim v_n^2\lim(u_n^2+v_n^2)\leq\lim z_n\leq\lim\sqrt{u_n^2+v_n^2}=\sqrt{\lim u_n^2+\lim v_n^2}$$

ובסה"כ: $u^2+v^2\leq z\leq\sqrt{u^2+v^2}$ כלומר $(u,v,z)\in\Omega$. עתה נשים לב ש־

$$u^2+v^2\leq\sqrt{u^2+v^2}$$

אם ורק אם $u^2+v^2\leq 1$. לכן Ω מוכלת בכדור היחידה סביב הראשית ב־ $\mathbb{R}^3$, ובפרט היא חסומה.

הערה: הסגירות של הקבוצה (בדגש על הגרירה $z_n\leq\sqrt{u_n^2+v_n^2}\Rightarrow z\leq\sqrt{u^2+v^2}$) נובע מרציפות פונקצית השורש. אריתמטיקה של גבולות לא מספיקה להוכחת הטענה -- לפחות לא ללא נימוק נוסף.

(ב) (15 נק') חשבו את האינטגרל

$$.\iiint_\Omega zdxdydz$$

נשתמש בשינוי המשתנה מן הסעיף הקודם. $g(x,y,z)=(x-y,x+y,z)$ אז

$$J_g(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ו־ $|J_g(x,y,z)|=2$. לפי משפט שינוי המשתנה $\iint_\Omega z|J_g|dxdydz=\iint_{g(\Omega)}dudvdz$. במילים אחרות האינטגרל הנדרש מחושב ע"י $\frac{1}{2}\iint_{\Omega'}zdxdydz$ כאשר

$$.\Omega':=\{(u,v,z):u^2+v^2\leq z\leq\sqrt{u^2+v^2}\}$$

עתה נעבור לקו־אורדינטות גליליות, ונקבל

$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega'}zdxdydz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^r rzdzdrd\theta=\frac{\pi}{24}$$

3. (א) (10 נק') תהי $f(x,y) = x^8 + 3x^4y^3 + y^7x^{20} + y$. הראו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ למשוואה $f(x,y) = 0$ יש פתרון אחד ויחיד.

תשובה: עבור x_0 הפונקציה $h_{x_0}(y) = x_0^8 + 3x_0^4y^3 + y^7x_0^{20} + y$ היא פולינום ב־ y ממעלה אי־זוגית. לכן, לפי משפט ערך הביניים (מחדו"א 1) יש לפולינום זה שורש ממשי. כיוון שהנגזרת $h'_{x_0}(y) = 6x_0^4y^2 + 7x_0^{20}y^6 + 1$ אי־שלילית לכל y הפונקציה עולה ממש בכל $\mathbb{R}$ ולכן השורש הוא יחיד.

הערה: משפט הפונקציה הסתומה לא יעזור לפתרון הבעיה משני טעמים. ראשית, העובדה שניתן להציג את קו הרמה בסביבה של כל נקודה כגרף של פונקציה מובטח בסביבה של פתרון ־־ ז"א קיום פתרון הוא הנחה במשפט ־־ ואינו מבטיח שאכן קיים פתרון למשוואה. שנית, משפט הפונקציה הסתומה מבטיח פתרון יחיד רק בסביבה של פתרון נתון. אבל לא מבטיח פתרון יחיד באופן גלובלי.

(ב) (9 נק') לכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר $\phi(x)$ הפתרון היחיד של $f(x,y) = 0$ מן הסעיף הקודם. הוכיחו כי הפונקציה $\phi(x)$ היא $\mathcal{C}^1$ בכל הישר הממשי וחשבו את נגזרתה שלה בנקודה 0.

תשובה: זו מסקנה מיידית ממשפט הפונקציה הסתומה: כפי שכבר חישבנו הנגזרת החלקית של f לפי y היא חיובית לכל x ולכן בכל נקודה $f(x_0, y_0) = 0$ מתקיים ש־ $y_0 = \phi(x_0)$ ו־ $\phi(x)$ היא $\mathcal{C}^1$ בסביבת x_0. כיוון ש־ x_0 הייתה שרירותית הטענה נובעת. נשים לב ש־ $f(0,0) = 0$ ומכיוון ש־ $f(x,\phi(x))' \equiv 0$ נקבל מכלל השרשרת $0 = (f_x(0,0), f_y(0,0))\begin{pmatrix} 1 \\ \phi'(0) \end{pmatrix}$. ובסהך הכל: $\phi'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = 0$.

(ג) (6 נק') תהי $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ספירת היחידה. תהי U קבוצה פתוחה המכילה את כדור היחידה הסגור סביב הראשית. יהי $F : U \to \mathbb{R}^3$ שדה וקטורי חלק. נניח שקיימת פונקציה $c : S^2 \to \mathbb{R}_{>0}$ (חלקה) כך ש־ $F(x) = c(x)x$ לכל $x \in S^2$. הוכיחו שיש נקודה $x_0 \in U$ כך ש־ $\text{div}F(x_0) \neq 0$.

תשובה: ממשפט גאוס

$$\iint_{S^2} F \cdot dS = \iiiint_{B_1(0)} \text{div}(F) dxdydz .$$

לכן יספיק להראות שהאינטגרל המשטחי הוא חיובי ממש. ואכן

$$\iint_{S^2} F \cdot dS = \iint_{S^2} F(v) \cdot \hat{n}(v) dS$$

כאשר $\hat{n}(v)$ הוא הנורמל החיצוני לספירה בנקודה v. אבל $\hat{n}(v) = v$ ולכן, מהנתון:

$$\iint_{S^2} F(v) \cdot \hat{n}(v) dS = \iint_{S^2} c(v)||v||^2 dS .$$

אם $g : T \to S^2$ פרמטריזציה של הספירה, כך ש־ $g(s,t) = (X(s,t), Y(s,t))$ נקבל (כיוון שעל הספירה $||v||^2 = 1$):

$$= \iint_{S^2} c(v) dS = \iint_T c(g(t,s)) \left|\left| \frac{\partial X(s,t)}{(s,t)} \times \frac{\partial Y(s,t)}{(s,t)} \} \right|\right| dT$$

ומההנחה, האינטגרנד באינטגרל הימני הוא חיובי.

בהצלחה!