חדו"א וקטורי להנדסת חשמל
מועד א'

תאריך הבחינה: 21/02/2018
שם המרצים: **י. אופנהיים, א. חסון, ד. קרנר**
שם הקורס: **חדו"א וקטורי להנדסת חשמל**
מספר הקורס: 201.1.9631
שנה: 2017/8 סמסטר: **סתיו** מועד: **ב'**
חומר עזר: אין.
משך הבחינה: שלוש שעות.

קראו בעיון את ההנחיות הכלליות ואת ההנחיות של כל חלק בטרם תגשו לענות על הבחינה.

הנחיות כלליות: תוכלו להשתמש בכל טענה שנלמדה בכיתה, בתרגול או בעבודות הבית. בכל עת שאתם עושים זאת, צטטו במדויק את הטענה בה אתם עושים שימוש, והסבירו כיצד אתם משתמשים בה.

בכל שאלה/סעיף תוכלו לבחור בתשובה "אני לא יודע/ת", שתזכה אתכם ב־20% (מעוגלים למספר השלם הקרוב) מן הציון עבור אותה שאלה.

כתבו את תשובותיכם בגוף השאלון. אם המקום המוקצה לכתיבת התשובה אינו מספיק לכם, תוכלו להמשיך את התשובה בגב הטופס, אך ציינו זאת בברור. לתשומת לבכם, דפי הטיוטה ישלחו ישירות לגריסה, ולא יבדקו.

מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 105.

סימונים

1. אם $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אז $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ הוא השדה הוקטורי שמסומן גם (P,Q) או $P(x,y)\hat{\mathbf{i}}+Q(x,y)\hat{\mathbf{j}}$. הסימון לשדות וקטורים במימדים גבוהים יותר הוא אנלוגי.
2. אם $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ הוא שדה וקטורי אז curlF הוא הרוטור של F, המסומן גם rotF או $\nabla\times F$.
3. בקו־אורדינטות כדוריות, r הוא אורך הוקטור v, φ הזוית שיוצר הוקטור v עם ציר z, ו־ θ הזוית שיוצרת ההטלה של הוקטור v על מישור xy עם ציר x.
4. אם $f:\mathbb{R}^n\to R$ אז f_{x_i} היא הנגזרת החלקית של f לפי המשתנה x_i, המסומנת גם $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ או f'_{x_i}.

נכון/לא נכון

1. ענו על השאלות הבאות. משקל כל שאלה 10 נק'. בכל שאלה קבעו האם הטענה נכונה או לא, והוכיחו את טענותיכם. אורך תשובתכם לא יעלה על חמש שורות.

(א) (10 נק') תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה עבורה קיימות הנגזרות החלקיות בראשית, ומתקיים $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. אזי כל הנגזרות הכיוונית של f בראשית קיימות ושוות 0.

(ב) (10 נק') תהי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציה $\mathcal{C}^2$ ו־ a נקודה קריטית של f. נסמן $H_f(a)$ מטריצת ההסיאן של f בנקודה a. נניח ש־ $\det(H_f(a))<0$ ו־ $S=0$, כאשר, S סכום הערכים העצמיים של $H_f(a)$. אזי a איננה נקודת קיצון גלובלית של f.

(ג) (10 נק') יהי

$$F(x,y,z) := \left(\frac{x}{x^2+4y^2+z^2}dx + \frac{4y}{x^2+4y^2+z^2}dy + \frac{z}{x^2+4y^2+z^2}dz \right)$$

ו־ $S := \{(x,y,z) : 2x^2+8y^2+2z^2 = 1\}$. אזי לכל מסילה חלקה $C \subseteq S$ מתקיים $\int_C F \cdot dC = 0$.

שאלות פתוחות

ענו על שלוש השאלות הבאות.

2. (25 נק') עבור הפונקציה

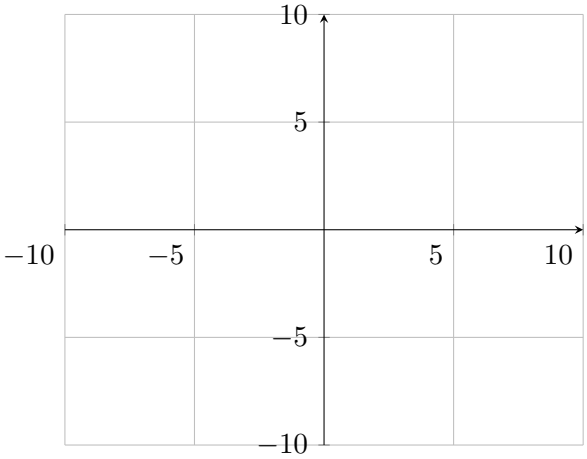
$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{y^2 - y}$$

שרטטו את קווי הרמה $f(x,y) = c$ בתחום ההגדרה של f עבור שנים מערכי c הבאים, לפי בחירתכם: $1, -1, -2$.

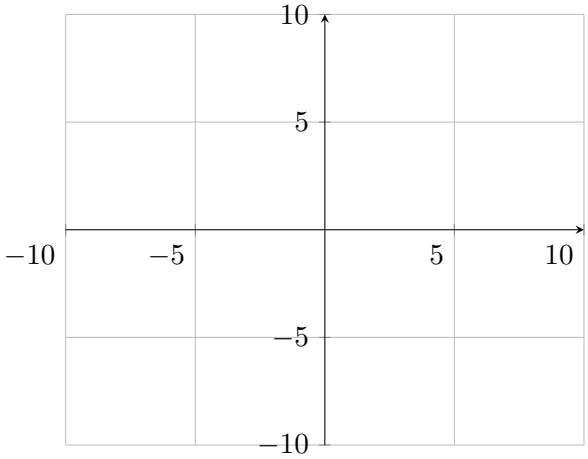
נמקו את תשובותיכם בעזרת החישובים המתאימים.

אנא צינו בברור מעל כל שרטוט לאיזה ערך של c הוא מתאים.

$c =$



$c =$



3. (15 נק') יהי

$$S := \{(x, y, x^2 + y^2) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ו־ $\hat{n}$ הנורמל למשטח S עם רכיב z שלילי.

(א) (15 נק') חשבו את

$$\iint_S F \cdot \hat{n} dS$$

כאשר $F(x, y, z) = (x^3, y^3, 0)$.

(ב) (10 נק') תהי

$$\gamma(t) := \left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} + \frac{\cos^2(t)}{6}\right)$$

עבור $t \in [0, 2\pi]$ חשבו את האינטגרל

$$\oint_\gamma F \cdot d\gamma$$

עם האורינטציה המושרית מן הפרמטריזציה הנתונה ו־ $F(x, y, z) = (\sin(x^3), \cos(y^3), 0)$.

4. (א) (15 נק') הראו כי לכל נקודה בחיתוך המשטחים

$$x^3 + y^3 + 3z = 0$$

ו־

$$x + y + z = 10$$

יש סביבה בה חיתוך המשטחים הוא עקומה חלקה.

(ב) (10 נק') תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה $\mathcal{C}^1$. נניח שקו הרמה $f(x,y)=0$ בתיבה $[-1,1]\times[-1,1]$ נתון ע"י גרף הפונקציה $\phi(x)=|x|$. ז"א

$$\{(x,y):f(x,y)=0,|x|,|y|\le 1\}=\{(x,|x|):|x|\le 1\}.$$

הראו באמצעות משפט הפונקציה הסתומה, או בדרך אחרת, כי

$$\nabla f(0,0)=(0,0).$$

בהצלחה!