חדו"א 3, חשמל 201.1.9631.

סתיו 2018. תרגיל בית מס' 0.

התרגיל הינו תרגיל רענון על חומר הנדרש לקורס.

1. (א) יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$ וקטורים ב $\mathbb{R}^3$, שיוצרים זווית 120^0 ואורכם $3 = ||\vec{v}||$, $4 = ||\vec{u}||$. חשבו:
   i. $||\vec{v}+\vec{u}||$, (תזכורת: $||\vec{v}||^2 = (\vec{v},\vec{v})$, מכפלה פנימית רגילה) ii. $(3\vec{v}+2\vec{u})\cdot(2\vec{v}-2\vec{u})$.
   (ב) עבור כל שני וקטורים, $\vec{u}$, $\vec{v}$ ב $\mathbb{R}^2$ הוכיחו: $||\vec{v}+\vec{u}||^2 + ||\vec{v}-\vec{u}||^2 = 2\left(||\vec{v}||^2 + ||\vec{u}||^2\right)$. תנו פירוש גאומטרי.
   (ג) חשבו את זוויות המשולש על קודקודים $(0,0,5)$, $(1,1,1)$, $(2,-1,3)$.

2. (א) מצאו נקודת החיתוך ואת הזווית בין הישרים: $\{2x+3y=1\}$, $\{3x+ay=2\}$. עבור איזה a הישרים מקבילים?
   (ב) מצאו את המרחק בין נקודה $(0,1,2)$ לישר $\{(1,2,1)+t(1,1,1)|\, t\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$.
   (ג) עבור אילו ערכים של a הנקודות $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(7,12,a)$ נמצאות על אותו ישר?
   (ד) עבור כל שלישיה של נקודות קבעו האם עובר דרכה מישור יחיד. אם כן, מצאו את הנורמל שלו והמשוואה שלו.
   i. $(1,0,1)$, $(2,1,2)$, $(0,-1,0)$. ii. $(1,2,3)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$.

3. ציירו גרפים של פונקציות הבאות: i. $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{Z}$, ii. $f(x)=x^\alpha$, כאן הבדילו בין מקרים: $\alpha<0$, $\alpha=0$, $0<\alpha<1$, $\alpha=1$, $\alpha>1$. iii. $f(x)=|1-x|+|1+x|$,

4. ציירו את התחומים הבאים ב $\mathbb{R}^2$: i. $\{|x|+|y|\le 1\}$, ii. $\{|2x-y|+|2y-x|\le 1\}$, iii. $\{-1\le xy\le 1,\ -1\le x-y\le 1\}$, iv. $\{-1\le xy\le 1,\ -1\le \frac{x}{y}\le 1\}$.

5. ציירו את העקומות הבאות ב $\mathbb{R}^2$.
   (א) a. $\{xy=0\}$, b. $\{x^2=y^2\}$, c. $\{x^2+1=y^2\}$, d. $\{x(x-1)(x+1)=0\}$, e. $\{(x^2-1)(y^2-1)=0\}$, f. $\{((x+y)^2-1)((x-y)^2-1)=0\}$, g. $\{4(x-2)^2+9(y-3)^2=1\}$
   (ב) $\{|x|^\alpha+|y|^\alpha=1\}$, $\alpha>0$. (הדרכה: מספיק לצייר את חלק העקום ברביע הראשון. הציגו את העקום כגרף של פונקציה $y=(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. היעזרו בגרף שציירתם בשאלה 3.) מה מקבלים עבור $\alpha=1$? $\alpha=2$? $\alpha=10$?

6. האם ניתן להרחיב את תחום הגדרה של הפונקציה ל $\mathbb{R}$ כולו כך שתהיה רציפה? i. $f(x)=\frac{1+x}{1+x^3}$, ii. $f(x)=\frac{1}{x}$, iii. $f(x)=\frac{tg(x)}{x}$, iv. $f(x)=\frac{1-cos(x)}{x^2}$, v. $f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}$ vi. $f(x)=(1+sin(x))^{ctan(2x)}$.

7. בדקו באילו נקודות הפונקציות הבאות גזירות? גזירות פעמיים? i. $f(x)=|x|\sqrt{|x|}$, ii. $f(x)=|x|^{\frac{7}{3}}$,
   iii. $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}:\ x\neq 0\\ 0:\ x=0\end{cases}$, iv. $f(x)=\begin{cases}x^2sin(\frac{1}{x}):\ x\neq 0\\ 0:\ x=0\end{cases}$ v. $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}:\ x\neq 0\\ 0:\ x=0\end{cases}$,
   vi. $f(x)=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$, vii. $f(x)=arcsin(cos(x))$.

8. (א) חשבו: i. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, ii. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2arctan\frac{k}{n}}{n^3}$, iii. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{ln(n+k)-ln(n)}{n}$. (רמז: סכומי רימן)
   (ב) חשבו: i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$, ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (arctan(t))^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$, iii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{sin(sin(x))}^{sin(x)} e^{t^2}dt}{x^2}$, iv. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{tan(x)} t\cdot sin(at)dt}{x-sin(x)}$.
   (ג) הוכיחו כי לכל פונקציה רציפה מתקיים: $\int_0^\pi xf(sin(x))dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(sin(x))dx$. (רמז: הציבו $t=\pi-x$.)

שאלות נוספות

9. (א) הוכיחו כי אלכסוני המעוין ניצבים.

(ב) ציירו את הגרפים של הפונקציות הבאות i. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (החלק השלם), ii. $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$, iii. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

(ג) ציירו את העקומות הבאות. (העקומות מוגדרות ע"י משוואות שרשומות בקואורדינטות קוטביות r, ϕ.)

a. $\{r = cos(\phi)\}$, b. $\{r = |cos(\phi)|\}$, c. $\{r = |sin(6\phi)|\}$, d. $\{r = \phi,\ \phi \in [0, \infty)\}$, e. $\{r = cos^2(\phi)\}$,

(ד) ציירו את התחומים הבאים ב $\mathbb{R}^2$. (ניתן להיעזר בעקומות אשר ציירתם בשאלה 5) a. $\{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \le 1\}$, b. $\{x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \le 1\}$,

10. (א) עבור איזה ערך של a העקומות $\{y = ax^2\}$, $\{y = ln(x)\}$ משיקות?

(ב) מצאו את כל המשיקים ל $\{y = x^2\}$ העוברים דרך הנקודה $(-3, 8)$.

(ג) חשבו את הזוויות בין עקומות $\{y = sin(x)\}$, $\{y = cos(x)\}$ בנקודות החיתוך שלהן. (כלומר את הזווית בין המשיקים.)

11. תהי $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$, עבור קבועים $\alpha > 1$, $C > 0$ וכל $x, y \in \mathbb{R}$, אז $f(x)$ קבועה.

(ב) אם $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ אז עבור כל קבוע a מתקיים: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x + a) - f(x)) = 0$. האם $f(x)$ בהכרח חסומה?

12. (א) הוכיחו כי פונקצית Dirichlet, $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, אינה אינטגראבילית באף קטע.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם $|f|$ אינטגרבילית ב $[a, b]$ אז גם f אינטגרבילית ומתקיים $|\int\limits_a^b f(x)dx| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

13. חשבו את אורך העקומות הבאות. i. $\left\{ \begin{array}{l} x = cos(t), \\ y = t + sin(t), 0 \le t \le \pi \end{array} \right\}$, ii. $y = a \cdot cosh\frac{x}{a}$, $x \in [p, q]$,

iii. $r = a\theta$, $0 \le \theta \le b$, iv. $\{y = \ln \sin x,\ x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\}$, v. $\{\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.