1. א. נדרוש שהוקטור

$$v=r_1(t)-r_2(s)=(3+t,1-t,2+2t)-(-s,2+3s,3s)=(3+t+s,-1-t-3s,2+2t-3s)$$

יהיה מאונך לוקטורי הכיוונים של הישרים הנתונים, כלומר ל- $v_1=(1,-1,2)$ ו- $v_2=(-1,3,3)$. נפתור את המערכת הבאה:

$$\begin{cases}\langle v,v_1\rangle=0\\ \langle v,v_2\rangle=0\end{cases},$$

כלומר (לאחר פתיחת סוגריים)

$$\begin{cases}6t-2s=-8\\ 2t-19s=0\end{cases}.$$

נקבל:

$$t=-\frac{76}{55},\ s=-\frac{8}{55}.$$

מתקיים

$$d=\left\|r_1\left(-\frac{76}{55}\right)-r_2\left(-\frac{8}{55}\right)\right\|=\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{55}}.$$

ב. נקודת החיתוך היא $(3,7,-6)$.

ג. $\frac{x-1}{-5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{7}$.

ד. משוואת הנורמל למישור $3x+4y+5z+36=0$ שעובר דרך הנקודה $(2,-3,4)$ נתונה ג"י

$$r(t)=(2+3t,-3+4t,4+5t).$$

הנקודה $(2,-3,4)$ מתקבלת עבור $t=0$, נקודת החיתוך בין הישר לבין הנורמל מתקבלת עבור $t=-1$

(פותרים את המשוואה $3(2+3t)+4(-3+4t)+5(4+5t)+36=0$), לכן הנקודה הסימטרית מתקבלת עבור $t=-2$ והיא

$$(-4,-11,-6).$$

2. א. $r(t)=(1,2t,t)$.

ב. $\alpha=\arccos\frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{11}}-\frac{\pi}{2}$.

3. נשים לב כי שטח המקבילית הבנויה על $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ שווה לשטח המקבילית הבנויה על $\vec{b}$ ו- $\vec{c}$ ושווה לשטח המקבילית הבנויה על $\vec{a}$ ו- $\vec{c}$. נשרטט את המשולש שצלעותיו הם הוקטורים $\vec{a}$, $\vec{b}$ ו- $\vec{c}$ כך שהכיוונים של הוקטורים $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$ ו- $\vec{a}\times\vec{c}$ זהיים (נסמן את הכיוון ב- $\hat{n}$). מתקיים

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c},$$

אבל

$$\vec{a}\times\vec{b}=ab\sin\gamma\hat{n},\vec{b}\times\vec{c}=bc\sin\alpha\hat{n},\vec{a}\times\vec{c}=ac\sin\beta\hat{n},$$

כלומר

$$ab\sin\gamma=bc\sin\alpha=ac\sin\beta.$$

נחלק את השיוויון האחרון ב- abc ונקבל את הנדרש.

4. כזכור, נפח המקבילון שווה למכפלה בין שטח הבסיס S (המקבילית שנוצרת ע"י הוקטורים u ו- w) לבין הגובה h. נסמן את וקטור היחידה בכיוון $u\times w$ ב- $\hat{n}$. מתקיים:

$$\left|\langle v,u\times w\rangle\right|=\left|\langle v,S\hat{n}\rangle\right|=S\left|\langle v,\hat{n}\rangle\right|=Sh=V.$$

5. M_1,M_2,M_3 על ישר אחד אמ"מ $v=M_2M_1,u=M_3M_2$ תלוים לינארית אמ"מ

$$\det\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$$

אמ"מ

$$0=\det\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}x_3-x_2 & y_3-y_2\\x_2-x_1 & y_2-y_1\end{pmatrix}=(x_3-x_2)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y_3-y_2)=$$

$$x_3y_2-x_2y_3+x_1y_3-x_3y_1+x_2y_1-x_1y_2=$$

$$\det\begin{pmatrix}x_3 & y_3\\x_2 & y_2\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\x_3 & y_3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}x_2 & y_2\\x_1 & y_1\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}x_2 & y_2\\x_3 & y_3\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}x_3 & y_3\\x_1 & y_1\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{pmatrix},$$

כנדרש.

6. א. נקבע $x\in\mathbb{R}$ ונחפש $y\in\mathbb{R}$ כך ש- $x^2+y^2-4x=0$. עלינו לפתור את המשוואה הריבועית

$$x^2+y^2-4x=0$$

ביחס ל- y. מתקיים

$$y_{1,2}(x)=\pm\sqrt{4x-x^2}\,.$$

נשים לב כי y מוגדר רק לערכי $x\in\mathbb{R}$ המקיימים

$$0\le x\le 4$$

אז המשוואה $x^2+y^2-4x=0$ מגדירה אליפסה.

ב. נקבע $x\in\mathbb{R}$ ונחפש $y\in\mathbb{R}$ כך ש- $4x^2-9y^2-36=0$. עלינו לפתור את המשוואה הריבועית

$$4x^2-9y^2-36=0$$

ביחס ל- y. מתקיים

$$y_{1,2}(x)=\pm\sqrt{4/9\,x^2-4}\,.$$

נשים לב כי y מוגדר רק לערכי $x\in\mathbb{R}$ המקיימים

$$|x|\ge 3$$

אז המשוואה $4x^2-9y^2-36=0$ מגדירה היפרבולה.

ג. החקירה דומה לחקירה של הסעיף הקודם.

ד. נקבע $y\in\mathbb{R}$ ונחפש $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $2x+y^2-4y-6=0$. עלינו לפתור את המשוואה

$$2x+y^2-4y-6=0$$

ביחס ל- x. מתקיים

$$x=-1/2\,y^2+2y+3\,.$$

נשים לב ש- $x\to-\infty$ כאשר $y\to\pm\infty$. נסיק כי המשוואה $2x+y^2-4y-6=0$ מגדירה פרבולה.

7. א. נרשום את המשוואה בצורה אחרת:

$$0 = x^2 + y^2 - 6xy = (x-3y)^2 - 8y^2,$$

ז"א

$$(x-3y)^2 = 8y^2,$$

מכאן

$$x = \left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) y,$$

קיבלנו שני ישרים $x = \left(3+2\sqrt{2}\right) y$ ו- $x = \left(3-2\sqrt{2}\right) y$. ברור שעקום זה אינו סגור.

ב. נציב

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},$$

נקבל

$$0 = 5r^2\cos^2\theta + 10r^2\sin^2\theta + 4r^2\cos\theta\sin\theta - 5 = 5r^2 + 5r^2\sin^2\theta + 4r^2\cos\theta\sin\theta - 5,$$

או

$$r^2(\theta) = \frac{5}{5 + 5\sin^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta}.$$

נסמן

$$g(\theta) = 5 + 5\sin^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta.$$

נשים לב כי

$$g(\theta) \geq 1,$$

מכאן $r(\theta)$ רציפה, בנוסף

$$g(\theta + 2\pi) = g(\theta).$$

מסקנה: העקום הינו עקום סגור.

ג. נציב

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},$$

נקבל

$$0 = 5x^2 - 4y^2 + 12xy - 22 = 5r^2\cos^2\theta - 4r^2\sin^2\theta + 12r^2\cos\theta\sin\theta - 22 =$$

$$r^2\cos^2\theta + 4r^2\cos 2\theta + 6r^2\sin 2\theta - 22,$$

כלומר

$$r^2(\theta) = \frac{22}{\cos^2\theta + 4\cos 2\theta + 6\sin 2\theta}.$$

נסמן

$$g(\theta) = \cos^2\theta + 4\cos 2\theta + 6\sin 2\theta,$$

נשים לב כי

$$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -5\frac{1}{2} < 0,$$

מכאן $r(\theta)$ אינה רציפה.

מסקנה: העקום אינו סגור.

8. זיהוי העקומים שנעשה בפתרונה של שאלה מס' 7 מספיק גם כדי לענות על השאלה הנוכחית. כמוכן ניתן לפתור את שאלה מס' 7 בעזרת הכלים של הפתרון של שאלה מס' 8.

א. נקבע $x \in \mathbb{R}$ ונחפש $y \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6xy = 0$. עלינו לפתור את המשוואה הריבועית

$$x^2 + y^2 - 6xy = 0$$

ביחס ל- y. מתקיים

$$y_{1,2}(x) = \frac{6x \pm \sqrt{36x^2 - 4x^2}}{2} = \left(3 \pm \sqrt{8}\right)x.$$

נשים לב כי לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x,y) = 0$ (וגם הפוך), אז המשוואה $f(x,y) = 0$ מגדירה זוג של ישרים (שנחתכים בראשית הצירים), לכן העקום קשיר.

ב. נקבע $x\in\mathbb{R}$ ונחפש $y\in\mathbb{R}$ כך ש- $f\left(x,y\right)=5x^2+10y^2+4xy-5=0$. עלינו לפתור את המשוואה הריבועית

$$5x^2+10y^2+4xy-5=0$$

ביחס ל- y . מתקיים

$$y_{1,2}\left(x\right)=\frac{-4x\pm\sqrt{200-184x^2}}{20}=\frac{-2x\pm\sqrt{50-43x^2}}{10} .$$

נשים לב כי y מוגדר רק לערכי $x\in\mathbb{R}$ המקיימים

$$\left|x\right|\le\sqrt{50/43}$$

אז המשוואה $f\left(x,y\right)=0$ מגדירה עקום חסום (אכן, נגדיר פונקציה $g_i:\left[-\sqrt{50/43},\sqrt{50/43}\right]\to\mathbb{R}$ ע"י $g_1\left(x\right)=\frac{-2x+\sqrt{50-43x^2}}{10}$ ו- $g_2\left(x\right)=\frac{-2x-\sqrt{50-43x^2}}{10}$, פונקציות אלה רציפות ולכן ע"פ משפט ווירשטראס חסומות) ולכן העקום הוא אליפסה, לכן העקום קשיר.

ג. נקבע $x\in\mathbb{R}$ ונחפש $y\in\mathbb{R}$ כך ש- $f\left(x,y\right)=5x^2-4y^2+12xy-22=0$. עלינו לפתור את המשוואה הריבועית

$$5x^2-4y^2+12xy-22=0$$

ביחס ל- y . מתקיים

$$y_{1,2}\left(x\right)=\frac{-12x\pm\sqrt{224x^2-352}}{-8}=\frac{-6x\pm\sqrt{56x^2-88}}{-4} .$$

נשים לב כי y מוגדר רק לערכי $x\in\mathbb{R}$ המקיימים

$$x\ge\sqrt{88/56}, x\le-\sqrt{88/56}$$

אז המשוואה $f\left(x,y\right)=0$ מגדירה עקום לא חסום (אכן, אם $x\to+\infty$ אז $y_1\left(x\right)\to-\infty$) ולכן העקום הוא היפרבולה, לכן העקום לא קשיר.