

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר א' תשע"ח
חשבון וקטורי להנדסת חשמל (201-1-9631)
דף תרגילים מס' 2

1. ציירו/תארו את המשטחים הבאים ב \mathbb{R}^3 . תארו את החתכים ע"י מישורים $\{x = x_0\}$, $\{y = y_0\}$, $\{z = z_0\}$.

- (א) a. $\{(x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0\}$.b $\{(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0\}$.c $\{(x - 1)(y + 1)(z + 2) = 0\}$.
 (ב) a. $\{x = z^2 + y^2 - 5\}$.b $\{x = -z^2 - y^2 - 5\}$.c $\{z = x^2 - y^2\}$.d $\{z = xy\}$.e $\{z^2 = x^2 + y^2 - 1\}$.f $\{x^2 = z^2 + y^2 + 1\}$
 (ג) a. $\{z = \sin(x^2 + y^2)\}$.b $\{z = \sin(x)\}$.c $\{\sin(x^2 + y^2 + z^2) = 1\}$.

טופולוגיה ב \mathbb{R}^n :

2. הוכיחו שאיחוד סופי או אינסופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה וחיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה. תנו דוגמה לכך שחיתוך אינסופי של קבוצות פתוחות אינו בהכרח קבוצה פתוחה.

3. תנו דוגמה ל:

- (א) קבוצה שאינה פתוחה ואינה סגורה.
 (ב) קבוצה סגורה שאינה חסומה
 (ג) קבוצה סגורה ב- \mathbb{R}^2 כך שההטלה שלה על \mathbb{R} (ציר x) אינה סגורה.

4. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, שרטטו אותן בדקו האם הן פתוחות, סגורות, חסומות, קומפקטיות?

- (א) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| < 3\}$ (ה) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z > 1\}$
 (ב) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| - |y| < 3\}$ (ו) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x| + |y| + |z| < 2\}$
 (ג) $(0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ (ז) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 < 1\}$
 (ד) $((0, 3) \times (1, 3)) \cup ((1, 3) \times (1, 4)) \subseteq \mathbb{R}^2$

פונקציה רבות משתנים:

6. בסעיפים הבאים הפונקציות מוגדרות ב- $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. בדקו האם ניתן להרחיב את ההגדרה לפונקציה רציפה ב- $(0, 0)$. במקרה שכן, מה צריך להיות הערך שלה ב- $(0, 0)$?

- (א) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (ו) $f(x, y) = \frac{\sin(3xy^2)}{y \cdot \tan y}$
 (ב) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (ז) $f(x, y, z) = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
 (ג) $f(x, y) = \frac{\cos x - 1 - x^2}{x^4 + y^4}$ (ח) $f(x, y, z) = \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$
 (ד) $f(x, y) = \frac{\sin(2x) - 2x - y}{x^3 + y}$ (ט) $f(x, y, z) = \frac{\sin(x+y+z) - \sin(x+y-z)}{z}$
 (ה) $f(x, y) = \frac{e^{x(y+1)} - x - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7. מצאו כל הנקודות שבהן הפונקציות רציפות:

- (א) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + xy^2}{x \cdot y} & , x \cdot y \neq 0 \\ 0 & , x \cdot y = 0 \end{cases}$ (ג) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-2)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-2)} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 (ב) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{|x|^3 + |y|} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

8. תהי $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - רציפה ונסמן גרף שלה $\Gamma = \{(x, y) : y = f(x), x \in \mathbb{R}^n\}$. הוכיחו כי Γ קבוצה סגורה ב- \mathbb{R}^{n+1} .

9. תהי X קבוצה קשירה מסילתית. נגדיר $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ - רציפה. הוכיחו כי $f(X)$ קבוצה קשירה מסילתית.