אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר א' תשע"ח
חשבון וקטורי להנדסת חשמל (201-1-9631)
פתרונות לדף תרגילים מס' 2

2. נוכיח כי איחוד סופי או אינסופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה . נסמן $F=\cup F_i$ נבחר $x\in F$ אז $\{\exists i \mid \quad x\in F_i\}$, הרי F_i קבוצה פתוחה, לכן קיים $r>0$ כך ש־ $B_r(x)\subseteq F_i$ ולכן $\cup F_i$ קבוצה פתוחה. באופן דומה אם $x\in F=\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ אז $\{\forall i \mid \quad x\in F_i\}$, ולכן קיים $r_i>0$ כך ש־ $\{\forall i \mid B_{r_i}(x)\subseteq F_i\}$. נסמן $r=min\{r_i, i=1\ldots n\}$ וקיבלנו כי מתקיים ש־ $B_r(x)\subseteq B_{r_i}(x)\subseteq F$ ולכן F פתוחה. לבסוף נשים לב כי $\{0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ הינו חיתוך אינסופי של קבוצות פתוחות שאינה פתוחה.

3. (א) קטע $[0,1)$ אינו פתוח כי איבר אפס אינו איבר פנימי וגם אינו סגור כי קיימת סדרה בקטע שמתכנסת לאחד שלא שייך לקטע.

(ב) $\mathbb{R}$ קבוצה סגורה ואינה חסומה

(ג) עקומה $y=tanx$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ קבוצה סגורה, הרי עבור כל סדרת נקודות מתכנסת $(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$ על גרף הפונקציה מתקיים שכל קואורדינטה מתכנסת בנפרד. כלומר הסדרה y_n היא סדרה מתכנסת ולכן היא חסומה, כלומר $x_n\not\to\frac{\pi}{2}$.
אך הטלתה על ציר X הינה קטע $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ שכמובן אינו סגור.

4. (א) נסמן $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|+|y|<3\}$ נוכיח שהקבוצה פתוחה.
נבחר $(x,y)\in A$ אז $|x|+|y|=r<3$. נבחר $\delta=\frac{3-r}{2}$, נתבונן בכדור פתוח $B_\delta(x,y)$.
יהיה $(a,b)\in B_\delta(x,y)$,
אז $|a|+|b|=|a-x+x|+|b-y+y|\leq|a-x|+|x|+|b-y|+|y|\leq r+|x-a|+|y-b|$
מכייון ש־ $|y-b|,|x-a|\leq\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\|(x,y)-(a,b)\|<\delta$
מקבלים $|a|+|b|\leq r+|x-a|+|y-b|<r+2\delta=3$
כלומר קיבלנו ש־ $|a|+|b|<3$.

(ב) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|-|y|<3\}$
נבחר $(x,y)\in B$ אז $|x|-|y|=r<3$. נבחר $\delta=\frac{3-r}{2}$, נתבונן בכדור פתוח $B_\delta(x,y)$.
יהיה $(a,b)\in B_\delta(x,y)$, אז מתקיים $x-\delta<a<x+\delta$, $y-\delta<b<y+\delta$.
ומכאן מאי שוויון המשולש נובע ש־ $|a|<|x|+|\delta|$ וגם $||x|-|\delta||<|a|$ $||y|-|\delta||<|b|$ $\leq$ $|y|-|\delta|\leq$.
ולכן $|a|-|b|\leq|x|+|\delta|-|y|+|\delta|=r+2\delta=3$,
כלומר קיבלנו ש־ $|a|-|b|<3$.

(ג) $C=(0,1)\times(0,1)\subseteq\mathbb{R}^2$
נבחר $(x_0,y_0)\in C$, אז $x_0\in(0,1)$,$y_0\in(0,1)$. נבחר $r=min\{x_0,y_0,1-x_0,1-y_0\}$.
נשים לב ש־ $1>r>0$, נתבונן בכדור פתוח $B_r(x_0,y_0)$.
יהיה $(x,y)\in B_r(x_0,y_0)$,
אז $x_0-r<x<x_0+r$, $y_0-r<y<y_0+r$.
ולכן מתקיים $r\leq\frac{1-x_0}{2}<1-x_0$ כך ש־ $x_0+r<1$.
באופן דומה $r\leq\frac{x_0}{2}<x_0$ ולכן $x_0-r>0$.
כלומר קיבלנו ש־
$(x_0-r,x_0+r)\subseteq(0,1)$ ו־ $x\in(0,1)$, באופן דומה גם $y\in(0,1)$.
כלומר $B_r(x_0,y_0)\subseteq C$.

(ד) לפי תרגיל הקודם איחוד סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה

(ה) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z>1\}$
נבחר $(x,y,z)\in D$

אז $x+y+z=r>1$. נבחר $\delta=\frac{r-1}{3}$, נתבונן בכדור פתוח $B_\delta(x,y,z)$.
יהיה $(a,b,c)\in B_\delta(x,y,z)$. אז $a-x>-\frac{r-1}{3}$,$b-y>-\frac{r-1}{3}$,$c-z>-\frac{r-1}{3}$.
לכן $a+b+c=a-x+b-y+c-z+x+y+z>-3\frac{r-1}{3}+r=1$

(ו) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x^2+y^2-z^2>1\}$
נוכיח את הטענה בעזרת המשפט:
$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ פונקציה רציפה. הקבוצה $B\in\mathbb{R}^m$ פתוחה.
אז הקבוצה $f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\in B\}$ פתוחה.
נגדיר פונקציה $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ רציפה.
הקבוצה הנתונה ניתן להציג בצורה: $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f(x,y,z)\in(1,\infty)\}$,
כאשר קטע פתוח $(1,\infty)$ קבוצה פתוחה ולכן לפי המשפט E פתוחה.

6. (א) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$
נחשב את הגבול לפי המסלולים שעוברים דרך ראשית הצירים.
$$\lim_{y=kx^2,x\to0}\frac{x^2kx^2}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}$$
הגבול תלוי בבחירת הפרמטר ולכן הוא אינו קיים והפונקציה לא רציפה

(ב) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$
$$0\le\left|\frac{sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\left|\frac{sin(xy)}{x}\right|=|y|\cdot\left|\frac{sin(xy)}{xy}\right|\xrightarrow[x\to0,y\to0]{}0$$

(ג) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{cosx-1-x^2}{x^4+y^4}$
נחשב את הגבול לפי המסלול שעובר דרך ראשית הצירים.
$$\lim_{y=x,x\to0}\frac{cosx-1-x^2}{2x^4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{-sinx-x}{8x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-cosx-1}{24x^2}=-\infty$$
גבול לא קיים

(ד) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{sin(2x)-2x-y}{x^3+y}$
נחשב את הגבול לפי המסלולים שעוברים דרך ראשית הצירים.
$$\lim_{x=0,y\to0}\frac{y}{y}=1$$
מצד שני
$$\lim_{y=0,x\to0}\frac{sin(2x)-2x}{x^3}=-\frac{4}{3}$$
גבול לא קיים

(ה) נוכיח ש־ $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x(y+1)}-x-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.
נשתמש בשקילות: $e^t-1\underset{t\to0}{\sim}t$.
ולכן נקבל $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(y+1)-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x(y+1)}-1-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$$0\le\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2}}\right|\le|y|\xrightarrow[y\to0]{}0$$

(ו) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{sin(3xy^2)}{y\cdot tany}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3xy^2}{y\cdot y}=0$

(ז) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^4+y^4+z^4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$.
כי
$$0\le\left|\frac{x^4+y^4+z^4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|\le\frac{x^4}{|x|}+\frac{y^4}{|y|}+\frac{z^4}{|z|}\xrightarrow[x\to0,y\to0,z\to o]{}0$$

7. (א) אם $x \neq 0, y \neq 0$ אז הפונקציה רציפה כמנה של פונקציות אלמנטריות.
נתבונן בנקודות מהצורה $(x_0, 0)$ כאשר $x_0 \neq 0$.
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{x^3+xy^2}{x\cdot y} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{x^2+y^2}{y} = \frac{x_0^2}{0} = \infty$$
הגבול לא קיים והפונקציה לא רציפה על ציר X.
נבדוק את הנקודת מהצורה $(0, y_0)$ כאשר $y_0 \neq 0$.
$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{x^3+xy^2}{x\cdot y} = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{x^2+y^2}{y} = \frac{y_0^2}{y_0} = y_0 \neq 0 = f(0,0)$$
לכן הפונקציה לא רציפה על ציר Y.
נבדוק את הגבול בראשית הצירים
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+xy^2}{x\cdot y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y} = \lim_{y=kx,x\to0)} \frac{x^2+k^2x^2}{kx} = 0$$
מצד שני
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y} = \lim_{y=x^2,x\to0)} \frac{x^2+x^4}{x^2} = 1$$
ולכן הגבול לא קיים בראשית והפונקציה רציפה בכל המישור $\mathbb{R}^2$ פרט לצירים.

(ב) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{|x|^3+|y|} 0 = f(0,0)$ כיוון ש־ $0 \le \left|\frac{x^2y}{|x|^3+|y|}\right| \le \frac{|x^2y|}{|y|} = x^2 \xrightarrow[x\to0]{} 0$ ולכן הפונקציה רציפה.

8. תהי $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y)$ סדרת הנקודות שכולה נמצאת על גרף הפונקציה $y = f(x)$ רציפה.

מהרציפות נובע שלכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ מתקיים $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

ולכן $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, f(x_n))$ כלומר הגבול $(x, f(x))$ נמצא על הגרף. ולכן הקבוצה סגורה.

9. נסמן $f(X) = Y$ כך ש־ $f : X \to Y$.

נבחר $a, b \in Y$ כך ש־ $f(x) = a, f(y) = b$ כאשר $x, y \in X$.

כיוון ש־ X קשירה מסילתית, קיימת פונקציה רציפה $\gamma : [0,1] \to X$ כך ש־ $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

אז $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ רציפה היא מסילה שמקיימת $f \circ \gamma(0) = a, f \circ \gamma(1) = b$.