אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר א' תשע"ח

חשבון וקטורי להנדסת חשמל (201-1-9631)

דף תרגילים מס' 3

דיפרנציאביליות ונגזרות כווניות

1. עבור הפונקציות הבאות

- לחשב נגזרות חלקיות (אם קיימות) בנקודה נתונה ולבדוק את רציפותן
- לבדוק דיפרנציאביליות של פונקציה באותה נקודה

(א) $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{1+x^2})$ בנקודה $(1,-1)$

(ב) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$ בנקודה $(1,1,1)$

(ג) $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \ln(\sum_{i=1}^{n} x_i)$ בנקודה $(1,2,\dots,n)$

(ד) $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ בנקודה $\vec{x} = \vec{0}$

(ה) $f(x,y) = \begin{cases} (xy)^2\sin(\frac{1}{xy}) & , \ x\cdot y \neq 0 \\ 0 & , \ x\cdot y = 0 \end{cases}$ בנקודה $(0,0)$

(ו) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin^2(x)}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ בנקודה $(0,0)$

(ז) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin(\frac{y}{\sqrt{|x|}}) & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$ בנקודה $(0,0)$

2. לחשב נגזרת כוונית עבור

(א) $f(x,y) = \ln(1+x+2y)$ בנקודה $(0,0)$ בכוון $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

(ב) $f(x,y,z) = x^2 - 3yz + 4$ בנקודה $(1,2,-1)$ בכוון הקרן היוצרת זויות שוות עם כל צירי הקואורדינטות

(ג) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ בנקודה $(0,0)$ בכוון $v = (1,1)$

3. עבור הפונקציות הבאות לחשב את מטריצת יעקובי $J_f(a)$

(א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3 \ , \ f(t) = (\cos t, \sin t, t) \ , \ a = t_0$

(ב) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \ , \ f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \ , \ a = (1,\frac{\pi}{2})$

(ג) $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \ , \ f(\vec{v},\vec{u}) = \vec{v}\times\vec{u} \ , \ a = (v_x,v_y,v_z)\times(u_x,u_y,u_z)$

חישבו בסעיף (ב') נגזרת כוונית $D_v f(a)$ לאורך וקטור $v = (1,1)$

4. בעזרת כלל שרשרת חישבו את מטריצת יעקובי $J_f(a)$ עבור הפונקציות הבאות

(א) $f(x,y) = \int_4^{\sqrt{xy}} e^{t^2}dt$ בנקודה $a = (2,8)$

(ב) $\frac{\sin(x+y)}{e^{x^2+y^2}}$ בנקודה $a = (0,0)$

(ג) $f=\underbrace{g\circ g...\circ g}_{\text{n פעמים}}$ כאשר $g(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ בנקודה: $a=(1,0)$

טופולוגיה

5. הראו כי העתקה

$$F:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n\ ,\ F(u,v)=u+v$$

היא פונקציה רציפה.

6. העתקה $T:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ נקראת בילינארית, אם מתקיים:

(א) לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$, לכל $z\in\mathbb{R}^m$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים כי

$$T(\lambda x+y,z)=\lambda T(x,z)+T(y,z)$$

(ב) לכל $x,y\in\mathbb{R}^m$, לכל $z\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים כי

$$T(z,\lambda x+y)=\lambda T(z,x)+T(z,y)$$

הוכיחו כי כל העתקה בילינארית $T:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ היא רציפה.

7. הראו כי ספרה $S^n=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\middle|\|x\|=1\right\}$ היא קבוצה קשירה מסילתית.

רמז: ניתן להשתמש בכך שאיחוד של קבוצות קשירות מסילתית שאינן זרות הינו קשיר מסילתית