אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר א' תשע"ח
חשבון וקטורי להנדסת חשמל (201-1-9631)

פתרון דף תרגילים מס' 3

דיפרנציאביליות ונגזרות כווניות

1. עבור הפונקציות הבאות

- לחשב נגזרות חלקיות (אם קיימות) בנקודה נתונה ולבדוק את רציפותן
- לבדוק דיפרנציאביליות של פונקציה באותה נקודה

(א) $f(x,y)=\arctan(\frac{y}{1+x^2})$ בנקודה $(1,-1)$

פתרון:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2yx}{(1+x^2)^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1+x^2}{1+x^2+y^2}$$
$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)=\frac{2}{5} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)=\frac{2}{3}$$

שתי הנגזרות קיימות ורציפות בכל מקום ובפרט בסביבה של נקודה $(1,-1)$ ולכן $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב־ $(1,-1)$

(ב) $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$ בנקודה $(1,1,1)$

פתרון:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}-1} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\ln(x)}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{y\ln(x)}{z^2}\cdot x^{\frac{y}{z}}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=1 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=0$$

בסביבה קטנה של נקודה $(1,1,1)$ שלושת הנגזרות קיימות ורציפות ולכן $f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית ב־ $(1,1,1)$

(ג) $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\ln(\sum_{i=1}^n x_i)$ בנקודה $(1,2,\dots,n)$

פתרון:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad , \ k=1,2,...,n \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(1,2,...,n)=\frac{2}{n(n+1)}$$

בסביבה קטנה של נקודה $(1,2,...,n)$ כל הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות ולכן $f(x_1,x_2,...,x_n)$ דיפרנציאבילית ב־ $(1,2,...,n)$

(ד) $f(\vec{x})=\|\vec{x}\|$ בנקודה $\vec{x}=\vec{0}$

פתרון: נשים ל כי

$$f(0,...,0,x_k,0,...,0)=|x_k| \ , \ k=1,2,...,n$$

ולכן נגזרות חלקיות של f לא קיימות בנק' $\vec{x}=\vec{0}$ ולכן f אינה דיפרנציאבילית באותה נקודה.

(ה) $f(x,y)=\begin{cases}(xy)^2\sin(\frac{1}{xy}) & , x\cdot y\neq 0\\ 0 & , x\cdot y=0\end{cases}$ בנקודה $(0,0)$

פתרון:

עבור $x\cdot y\neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2yx^2\sin\left(\frac{1}{xy}\right)-y\cos\left(\frac{1}{xy}\right)$$

עבור $y_0\neq 0$, $(x,y)=(0,y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x}=\lim_{x\to 0}xy_0^2\sin\left(\frac{1}{xy}\right)=0$$

כי $\lim_{x\to 0}x=0$ ו־ $\left|y_0^2\sin\left(\frac{1}{xy}\right)\right|\leq y_0^2$

ועבור $(x,y)=(0,0)$:

$$f(x,0)=0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

לסיכום קיבלנו :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2yx^2\sin\left(\frac{1}{xy}\right)-y\cos\left(\frac{1}{xy}\right) & , x\cdot y\neq 0\\ 0 & , x\cdot y=0\end{cases}$$

ומסימטריה בין x ל־ y מקבלים כי

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}2xy^2\sin\left(\frac{1}{xy}\right)-x\cos\left(\frac{1}{xy}\right) & , x\cdot y\neq 0\\ 0 & , x\cdot y=0\end{cases}$$

לפי כך הנגזרות החלקיות של קיימות בסביבה של $(0,0)$ ורציפות ב־ $(0,0)$ ולכן f דיפרנציאבילית ב־ $(0,0)$.

שימו לב! קל לראות כי נגזרות חלקיות של f אינן רציפות בכל נקודה על צירי קואורדינטות חוץ מהראשית, ובכל זאת f דיפרנציאבילית גם בנקודות אלה כהרכבה של שתי פונקציות דיפרנציאביליות (בכל מקום) :

$$f=g\circ h\ ,\qquad h:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}\ ,\ h(x,y)=xy$$

$$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\ ,\ g(t)=\begin{cases}t^2\sin(t) & , t\neq 0\\ 0 & , t=0\end{cases}$$

(ו) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin^2(x)}{x^2+y^2} & , (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$ בנקודה $(0,0)$

פתרון: נשים לב כי

$$f(x,0)=0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

$$f(0,y)=0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

ומצד שני נגזרת כוונית של f ב־ $(0,0)$ לאורך וקטור $(1,1)$:

$$f(t,t)=\frac{\sin^2 t}{2t} \implies D_f(0,0)(1,1)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{2t^2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

לכן f אינה דיפרנציאבילית ב־ $(0,0)$. מכוון שנגזרות חלקיות של f קיימות בכל מקום מקבלים כי לפחות אחת מהן לא רציפה ב־ $(0,0)$ (וחישוב מפורש מראה שלמעשה שתיכן אינן רציפות)

(ז) $f(x,y)=\begin{cases} x\sin(\frac{y}{\sqrt{|x|}}) & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0\end{cases}$ בנקודה $(0,0)$

פתרון: נשים לב כי

$$f(x,0)=0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$
$$f(0,y)=0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

נראה כי f דיפרנציאבילית בראשית עם דיפרנציאל מתאפס . יש לבדוק כי

$$(*) \qquad 0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-D_f(0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

מכוון שלכל $a\in\mathbb{R}$

$$|\sin(a)|\leq |a|$$

מקבלים

$$0\leq |f(x,y)|=|x|\cdot\left|\sin\left(\frac{y}{\sqrt{|x|}}\right)\right|\leq\sqrt{|x|}\cdot|y|$$

ולכן

$$0\leq\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\sqrt{|x|}\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

מכוון ש־ $0\leq\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1$ ו־ $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{|x|}=0$ מקבלים כי אגף ימני מתכנס ל־0. לכן לפי משפט סנדוויץ' (*) מתקיים .

שימו לב! $\frac{\partial f}{\partial x}$ אינה מוגדרת בנקודות $(0,y_0)$, $y_0\neq 0$ ו־

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\sin(\frac{y}{\sqrt{|x|}})-\frac{y}{2\sqrt{|x|}}\cos(\frac{y}{\sqrt{|x|}}) & , \ x\neq 0\\ 0 & , \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

אינה רציפה בראשית .
מצד שני,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{|x|}}\cos(\frac{y}{\sqrt{|x|}}) & , \ x\neq 0\\ 0 & , \ x=0\end{cases}$$

רציפה (כמכפלה של חסומה במתכנסת לאפס) .

הערה: שימו לב! הגרסא החופשית של האלגוריתם של Wolfram מתייאשת ולא מספקת תשובה נכונה בשאלה הזאת.

2. לחשב נגזרת כוונית עבור

(א) $f(x,y)=\ln(1+x+2y)$ בנקודה $(0,0)$ בכוון $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

פתרון: f דיפרנציאבילית בנק' $(0,0)$ ולכן

$$D_f(0,0)(v)=\frac{\partial f}{\partial x}v_x+\frac{\partial f}{\partial y}v_y=\frac{1-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

(ב) $f(x,y,z)=x^2-3yz+4$ בנקודה $(1,2,-1)$ בכוון הקרן היוצרת זויות שוות עם כל צירי הקואורדינטות

פתרון: מטעמי סימטריה $v=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. מכוון ש־ f דיפרנציאבילית ב־ $(1,2,-1)$ מקבלים

$$D_f(0,0)(v)=\frac{\partial f}{\partial x}v_x+\frac{\partial f}{\partial y}v_y+\frac{\partial f}{\partial z}v_z=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ג) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ בנקודה $(0,0)$ בכוון $v=(1,1)$

פתרון:

$$\hat{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\ ,\quad f\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=2^{-\frac{1}{6}}t\quad\Longrightarrow\quad D_f(v)=\frac{df}{dt}\Big|_{t=0}=2^{-\frac{1}{6}}$$

3. עבור הפונקציות הבאות לחשב את מטריצת יעקובי $J_f(a)$

(א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\ ,\ f(t)=(\cos t,\sin t,t)\ ,\ a=t_0$

פתרון:

$$D_f(t_0)=\begin{pmatrix}\frac{df_1}{dt}(t_0)\\ \\ \frac{df_2}{dt}(t_0)\\ \\ \frac{df_3}{dt}(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\quad\sin(t_0)\\ \cos(t_0)\\ 1\end{pmatrix}$$

(ב) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\ f(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)\ ,\ a=(1,\frac{\pi}{2})$

פתרון:

$$D_f(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}\\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad D_f\big(1,\frac{\pi}{2}\big)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ג) $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\ ,\ f(\vec{v},\vec{u})=\vec{v}\times\vec{u}\ ,\ a=(v_x,v_y,v_z)\times(u_x,u_y,u_z)$

פתרון:

$$D_f(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial v_x}&\frac{\partial f_1}{\partial v_y}&\frac{\partial f_1}{\partial v_z}&\frac{\partial f_1}{\partial u_x}&\frac{\partial f_1}{\partial u_y}&\frac{\partial f_1}{\partial u_z}\\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_x}&\frac{\partial f_2}{\partial v_y}&\frac{\partial f_3}{\partial v_z}&\frac{\partial f_2}{\partial u_x}&\frac{\partial f_2}{\partial u_y}&\frac{\partial f_3}{\partial u_z}\\ \\ \frac{\partial f_3}{\partial v_x}&\frac{\partial f_3}{\partial v_y}&\frac{\partial f_3}{\partial v_z}&\frac{\partial f_3}{\partial u_x}&\frac{\partial f_3}{\partial u_y}&\frac{\partial f_3}{\partial u_z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&u_z&-u_y&0&-v_z&v_y\\-u_z&0&u_x&v_z&0&-v_x\\u_y&-u_x&0&-v_y&v_x&0\end{pmatrix}$$

חישבו בסעיף (ב') נגזרת כוונית $D_vf(a)$ לכוון וקטור $v=(1,1)$

פתרון: מכוון ש־ f דיפנציאבילית ב־ a :

$$D_f(a)\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

4. בעזרת כלל שרשרת חישבו את מטריצת יעקובי $J_f(a)$ עבור הפונקציות הבאות

א) $f(x,y)=\int_4^{\sqrt{xy}}e^{t^2}dt$ בנקודה $a=(2,8)$

פתרון: נשים לב כי

$$f=g\circ h\ ,\qquad h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ ,\ h(x,y)=\sqrt{xy}$$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ g(t)=\int_4^t e^{t'^2}dt'$$

מכוון ש־ h דיפרנציאבילית ב־ a ו־ g דיפרנציאבילית ב־ $h(a)=4$ (נזכיר כי $h'(t)=e^{t^2}$ לפי משפט ניוטון־לייבניץ) מקבלים לפי כלל שרשרת כי

$$D_f=D_g\circ D_h=\frac{e^{xy}}{2}\left(\sqrt{\frac{y}{x}},\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\implies D_f(a)=e^{16}\left(1,\frac{1}{4}\right)$$

ב) $\frac{\sin(x+y)}{e^{x^2+y^2}}$ בנקודה $a=(0,0)$

פתרון: נשים לב כי

$$f=g\circ h\circ i\ ,\qquad h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ ,\ g(x,y)=\frac{x}{y}$$

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\ h(x,y)=(\sin x,e^y)$$
$$i:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ ,\ i(x,y)=(x+y,x^2+y^2)$$

לכן לפי כלל שרשרת :

$$D_f(a)=D_g(h\circ i(a))\circ D_h(i(a))\circ D_i(a)=\left(\frac{1}{y},-\frac{x}{y^2}\right)\Big|_{(0,1)}\circ\begin{pmatrix}\cos x&0\\0&e^y\end{pmatrix}\Big|_{(0,0)}\circ\begin{pmatrix}1&1\\2x&2y\end{pmatrix}\Big|_{(0,0)}$$

$$\implies D_f(a)=(1,0)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=(1,1)$$

(ג) $f = \underbrace{g \circ g ... \circ g}_{\text{n פעמים}}$ כאשר $g(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ בנקודה: $a = (1,0)$

פתרון: נשים לב כי $g(a) = a$ לכן לפי כלל שרשרת מקבלים :

$$D_f(a) = D_g(a)^n = \left(\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \Bigg|_a \right)^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

טופולוגיה

5. הראו כי העתקה

$$F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n \ , \ F(u,v) = u + v$$

היא פונקציה רציפה.

פתרון: מספיק להראות כי כל קואורדינטה של F ־ פונקציה רציפה. אבל

$$F_i(u,v) = u_i + v_i = \pi_i(u,v) + \pi_{n+i}(u,v)$$

כאשר

$$\pi_k : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \ , \qquad\qquad k = 1,2,...,2n$$
$$\pi_k(x_1, x_2, ..., x_{2n}) = x_k$$

־ פונקציות הקואורדינטות. נזכיר כי כל אלה הן פונקציות רציפות. לכן גם פונקציות $F_i \ , \ i = 1,2,...n$ ־ רציפות כסכום של כאלה.

6. העתקה $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ נקראת בילינארית, אם מתקיים:

(א) לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$, לכל $z \in \mathbb{R}^m$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$T(\lambda x + y, z) = \lambda T(x,z) + T(y,z)$$

(ב) לכל $x, y \in \mathbb{R}^m$, לכל $z \in \mathbb{R}^n$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$T(z, \lambda x + y) = \lambda T(z,x) + T(z,y)$$

הוכיחו כי כל העתקה בילינארית $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ היא רציפה.

פתרון: נסמן $\vec{e}_i \ , \ i = 1,2,...,r$ ־ בסיס סטנדרטי של $\mathbb{R}^r$. לפי תכונת הביליניאריות :

$$T(v,u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \ , \ \sum_{j=1}^{m} u_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i,j} T(\vec{e}_i, \vec{e}_j) v_i u_j$$

לכן כל רכיב של T :

$$T_k(u,v) = \sum_{i,j} T_k(\vec{e}_i, \vec{e}_j) v_i u_j = \sum_{i,j} T_k(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \pi_i(u,v) \pi_{n+j}(u,v)$$

(שימו לב כי $T_k(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ ־ קבועים) .

מכוון שפונקציות הקואורדינטות π_k , $k = 1, 2, ..., n+m$ ־ רציפות גם המכפלות שלהן $\pi_r \cdot \pi_s$ ־ פונקציות רציפות, ולכן גם T_k רציפה כצירוף ליניארי של רציפות ולכן גם T ־ רציפה.

7. הראו כי ספרה $S^n = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| = 1 \right\}$ היא קבוצה קשירה מסילתית.

רמז: ניתן להשתמש בכך שאיחוד של קבוצות קשירות מסילתית הינו קשיר מסילתית

פתרון: בהינתן כל שתי נקודות $a, b \in S^n$, $a \neq -b$ ניתן לחבר בינהם ע"י קטע ישר

$$ta + (1-t)b \ , \ t \in [0, 1]$$

שאינו עובר בראשית (בדקו!) . אם "ננרמל" ־ נקבל מסילה ב־ S^n שמחברת בין שתי הנקודות

$$\gamma : [0, 1] \to S^n \ , \ \gamma(t) = \frac{ta + (1-t)b}{\|ta + (1-t)b\|}$$

עבור נקודות "אנטיפודיות" ־ $a = -b$ ניתן לבנות מסלול מבוקש כהרכבה של שני מסלולים : מ־ a ל־ c ומ־ c ל־ b , כאשר c ־ נקודה נוספת כלשהי על הספרה