1. הגדרה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה. אומרים ש- $f:U \to \mathbb{R}$ *בלתי תלויה ב-* y אם קיימת פונקציה $g:\pi_1(U) \to \mathbb{R}$ כך ש- $f(x,y)=g(x)$ לכל $(x,y)\in U$ (כאן π_1 היא פונקציית ההטלה על הקואורדינטה הראשונה, דהיינו $\pi_1(x,y)=x$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$).

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ לכל $(x,y)\in U$ אזי f בלתי תלויה ב- y.

ב. אם U קמורה, f ממחלקת $C^1(U)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ לכל $(x,y)\in U$ אזי f בלתי תלויה ב- y.

2. תהא $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציית C^2 (ז"א f גזירה פעמיים ונגזרות מסדר שני רציפות). נגדיר $u=f(x,y)$ כאשר $x=r\cos t$ ו- $y=r\sin t$.

א. חשבו את $\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial r^2},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$;

ב. השתמשו בסעיף א' כדי לקבל הצגת הלפלסיאן $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ בקואורדינטות קוטביות.

3. א. יהיו $Q(\mathbf{x}),Q^*(\mathbf{x})$ שני פולינומים במשתנים $x_1,x_2,\dots,x_n$ מדרגה 2. הראו שאם

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{Q(\mathbf{x})-Q^*(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}=0,$$

אז $Q(\mathbf{x})=Q^*(\mathbf{x})$.

ב. תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשפחת $C^3(U)$ כאשר U סביבה פתוחה של $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$, ו- $Q(\mathbf{x})$ פולינום במשתנים $x_1,x_2,\dots,x_n$ מדרגה 2. הראו שאם

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{x})-Q(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2}=0,$$

אז Q הינו פולינום טיילור מדרגה 2 של f סביב הנקודה $\mathbf{a}$.

ג. מצאו פולינום טיילור מדרגה 2 של $e^{xy}\sin(x+y)$ סביב הנקודה $(0,0)$ ללא חישוב הנגזרות. הוכיחו שצדקתם בהסתמך על סעיף ב'.

4. כתבו פולינום טיילור של $f(\mathbf{x})$ סביב $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ מדרגה 2 כאשר:

א. $f(x,y)=xy$, $\mathbf{a}=(1,1)$.

ב. $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$, $\mathbf{a}=(1,-2)$.

ג. $f(x,y)=x^y$, $\mathbf{a}=(1,1)$.

5. ללא השימוש במשפט הפונקציה הסתומה קבעו אם המשוואה $y^7+5y^3+y+7x=0$ מגדירה y כפונקציה סתומה של x בסביבה קטנה דיה של הנקודה $(-1,1)$. אותה השאלה לגבי סביבה קטנה של נקודה (x_0,y_0) המקיימת $y_0^7+5y_0^3+y_0+7x_0=0$.

6. הוכיחו כי המשוואה $27y^2=(1-x)(8+x)^2$ מגדירה את x כפונקציה של y כאשר $1<y<2$ ואת y כפונקציה של x כאשר $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. מצאו משוואות המשיקים לגרפים של הפונקציות האלה בנקודה $\left(0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$.

7. נניח כי המשוואה $f(x,y,z)=0$ מגדירה את כל אחד מהמשתנים כפונקציה דיפרנציאבילית של שניים האחרים. הראו אז ש-

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$