1. הגדרה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה. אומרים ש- $f: U \to \mathbb{R}$ *בלתי תלויה* ב- y אם קיימת פונקציה $g: \pi_1(U) \to \mathbb{R}$ כך ש- $f(x,y) = g(x)$ לכל $(x,y) \in U$ (כאן π_1 היא פונקציית ההטלה על הקואורדינטה הראשונה, דהיינו $\pi_1(x,y) = x$ לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$).

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ לכל $(x,y) \in U$ אזי f בלתי תלויה ב- y.

פתרון: הטענה אינה נכונה. תהא

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0) \right\}.$$

נגדיר

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, x > 0 \wedge y > 0 \\ -x^2, x > 0 \wedge y < 0 \end{cases}.$$

מתקיים $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ לכל $(x,y) \in U$, אבל $f(1,1) = 1$ ו- $f(1,-1) = -1$.

ב. אם U קמורה ו- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ לכל $(x,y) \in U$ אזי f בלתי תלויה ב- y.

פתרון: הטענה נכונה. יהיו $(x_0, y_1), (x_0, y_2) \in U$. תהא $\phi: [0,1] \to U$ פונקציה המוגדרת ע"י

$$\phi(t) = (1-t)(x_0, y_1) + t(x_0, y_2).$$

נסמן

$$g = f \circ \phi.$$

מתקיים:

$$g'(t) = \left[f\left(x_0, y_1 + t(y_2 - y_1)\right) \right]' = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{dy}{dt} = 0,$$

נסיק כי g הינה פונקציה קבועה, בפרט

$$f(x_0, y_1) = g(0) = g(1) = f(x_0, y_2).$$

2. תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציית C^2 (ז"א f גזירה פעמיים ונגזרות מסדר שני רציפות). נגדיר $u=f\left(x,y\right)$ כאשר $x=r\cos t$ ו- $y=r\sin t$.

א. חשבו את $\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial r^2},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$;

פתרון: ע"פ כלל שרשרת:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}\sin t\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=-r\sin t\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos t\frac{\partial u}{\partial y}.$$

מכאן

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}\sin t\right)}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos t\underbrace{\cos t}_{\frac{\partial x}{\partial r}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos t\underbrace{\sin t}_{\frac{\partial y}{\partial r}}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin t\underbrace{\cos t}_{\frac{\partial x}{\partial r}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin t\underbrace{\sin t}_{\frac{\partial y}{\partial r}}$$

או

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2 t+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos t\sin t+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2 t$$

(בהתחשב בעובדה כי הנגזרות המעורבות שוות, הרי u הינה פונקציית C^2);

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\left(-r\sin t\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos t\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial t}=$$

$$-r\cos t\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\underbrace{\left(-r\sin t\right)}_{\frac{\partial x}{\partial t}}-r\sin t\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\underbrace{\left(r\cos t\right)}_{\frac{\partial y}{\partial t}}-r\sin t\frac{\partial u}{\partial y}+r\cos t\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\underbrace{\left(-r\sin t\right)}_{\frac{\partial x}{\partial t}}+r\cos t\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\underbrace{\left(r\cos t\right)}_{\frac{\partial y}{\partial t}}$$

או

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-r\cos t\frac{\partial u}{\partial x}+r^2\sin^2 t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2r^2\sin t\cos t\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-r\sin t\frac{\partial u}{\partial y}+r^2\cos^2 t\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

ב. השתמשו בסעיף א' כדי לקבל הצגת הלפלסיאן $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ בקואורדינטות קוטביות.

פתרון: מסעיף א' נובע

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=r^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2 t+2r^2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos t\sin t+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2 t,$$

לכן

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-r\cos t\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin t\frac{\partial u}{\partial y}+r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

מכאן

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\cos t\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{r}\sin t\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\underbrace{\left(\cos t\frac{\partial u}{\partial x}+\sin t\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial u}{\partial r}},$$

בסה"ך

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

3. א. יהיו $Q(\mathbf{x}),Q^*(\mathbf{x})$ שני פולינומים במשתנים $x_1,x_2,\dots,x_n$ מדרגה 2. הראו שאם

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{Q(\mathbf{x})-Q^*(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}=0,$$

אז $Q(\mathbf{x})=Q^*(\mathbf{x})$.

פתרון: נניח בשלילה ש- $Q(\mathbf{x})\neq Q^*(\mathbf{x})$, יהא $0\le l\le k$ הדרגה הכי קטנה של המונומים שמופיעים ב- $Q(\mathbf{x})-Q^*(\mathbf{x})$. נציג

$$Q(\mathbf{x})-Q^*(\mathbf{x})=F(\mathbf{x})+G(\mathbf{x}),$$

כאשר $F(\mathbf{x})$ הוא סכום של מונומים מתוך $Q(\mathbf{x})-Q^*(\mathbf{x})$ מדרגה l ו- $G(\mathbf{x})$ הוא סכום של מונומים מתוך $Q(\mathbf{x})-Q^*(\mathbf{x})$ מדרגה גדולה מ- l. יהא $\mathbf{0}\neq\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $F(\mathbf{b})\neq 0$. מתקיים:

$$\|t\mathbf{b}\|^l\ge\|t\mathbf{b}\|^k$$

ל- $t\in\mathbb{R}$ מספיק קטן. מתקיים:

$$0=\lim_{t\to 0^+}\frac{Q(t\mathbf{b})-Q^*(t\mathbf{b})}{\|t\mathbf{b}\|^l}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t\mathbf{b})+G(t\mathbf{b})}{t^l\|\mathbf{b}\|^l}=\frac{F(\mathbf{b})}{\|\mathbf{b}\|^l}\neq 0,$$

הגענו לסתירה.

ב. תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשפחת $C^3(U)$ כאשר U סביבה פתוחה של $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$, ו- $Q(\mathbf{x})$ פולינום במשתנים $x_1,x_2,\dots,x_n$ מדרגה 2. הראו שאם

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{x})-Q(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2}=0,$$

אז Q הינו פולינום טיילור מדרגה 2 של f סביב הנקודה $\mathbf{a}$.

פתרון: נסמן את פולינום טיילור מדרגה k סביב $\mathbf{a}$ של f ב- T_k. מתקיים:

$$\left|\frac{Q(\mathbf{h})-T_k(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k}\right|=\left|\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-Q(\mathbf{h})+T_k(\mathbf{h})-f(\mathbf{a}+\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k}\right|\leq$$

$$\left|\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-Q(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k}\right|+\left|\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-T_k(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k}\right|\xrightarrow[\|\mathbf{h}\|\to 0]{}0,$$

מסעיף הקודם נסיק כי $Q=T_k$.

ג. מצאו פולינום טיילור מדרגה 2 של $e^{xy}\sin(x+y)$ סביב הנקודה $(0,0)$ ללא חישוב הנגזרות. הוכיחו שצדקתם בהסתמך על סעיף ב'.

פתרון: נסמן:

$$p_2(x)=1+xy+\frac{xy}{2},\ q_2(x)=x+y,$$

נכפול בין שני הפולינומים ונקבל:

$$T(x)=\left(1+xy+\frac{x^2y^2}{2}\right)(x+y)=x+y+x^2y+xy^2+\frac{x^3y^2}{2}+\frac{x^2y^3}{2},$$

נסמן

$$T_2(x,y)=x+y.$$

נחשב:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-T_2(x)}{\|(x,y)\|^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}\sin(x+y)-(x+y)}{x^2+y^2}=$$

$$\begin{bmatrix} u=x+y \\ v=xy \end{bmatrix}=\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{e^{v}\sin u-u}{x^2+y^2}=$$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{e^{v}\sin u-\sin u+\sin u-u}{x^2+y^2}=\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{e^{v}\sin u-\sin u}{x^2+y^2}+\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\sin u-u}{x^2+y^2},$$

מתקיים:

$$0\le\left|\frac{e^{v}\sin u-\sin u}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}\left|\frac{e^{v}-1}{v}\right||\sin u|\to 0.$$

מתקיים:

$$0\le\left|\frac{\sin u-u}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{\frac{u^3}{6}+o(u^3)}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{(x+y)^3+o(u^3)}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{o(u^3)}{x^2+y^2}\right|,$$

נשים לב כי

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos\theta+\sin\theta)^3}{r^2}=\lim_{r\to 0}r(\cos\theta+\sin\theta)^3=0,$$

בנוסף

$$\frac{o(u^3)}{x^2+y^2}=\frac{o(u^3)}{u^3}\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}\to 0.$$

לכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-T_2(x)}{\|(x,y)\|^2}=0.$$

לכן, ע"פ סעיף ב', פולינום טיילור מדרגה 2 של $f(x,y)$ הוא $T_2(x,y)$.

4. כתבו פולינום טיילור של $f(\mathbf{x})$ סביב $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ מדרגה 2 כאשר:

א. $f(x,y)=xy$, $\mathbf{a}=(1,1)$.

פתרון: נחשב

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y,\frac{\partial f}{\partial y}=x,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1,$$

לכן

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=y,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=x,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=0,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=0,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=1,$$

מכאן

$$T_2(x,y)=f(1,1)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}(x-1)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}(y-1)+$$

$$\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}(x-1)^2+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(1,1)}(x-1)(y-1)+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}(y-1)^2\right]=$$

$$1+(x-1)+(y-1)+(x-1)(y-1).$$

ב. $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$, $\mathbf{a}=(1,-2)$.

פתרון: נחשב

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y-6,\frac{\partial f}{\partial y}=-2y-x-3,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,$$

לכן

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-2)}=0,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-2)}=0,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,-2)}=4,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,-2)}=-2,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(1,-2)}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,-2)}=-1,$$

מכאן

$$T_2(x,y)=f(1,-2)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-2)}(x-1)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-2)}(y+2)+$$

$$\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,-2)}(x-1)^2+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(1,-2)}(x-1)(y+2)+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,-2)}(y+2)^2\right]=$$

$$.5+2(x-1)^2-(y+2)^2-(x-1)(y+2)$$

ג. $f(x,y)=x^y$, $\mathbf{a}=(1,1)$.

פתרון: נחשב

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x ,$$

לכן

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=0,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=0,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=0,\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=1 ,$$

מכאן

$$T_2(x,y)=f(1,1)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}(x-1)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}(y-1)+$$

$$\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}(x-1)^2+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(1,1)}(x-1)(y-1)+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}(y-1)^2\right]=$$

$$.1+(x-1)+(x-1)(y-1)$$

5. ללא השימוש במשפט הפונקציה הסתומה קבעו אם המשוואה $y^7+5y^3+y+7x=0$ מגדירה y כפונקציה סתומה של x בסביבה קטנה דיה של הנקודה $(-1,1)$. אותה השאלה לגבי סביבה קטנה של נקודה (x_0,y_0) המקיימת $y_0^7+5y_0^3+y_0+7x_0=0$.

פתרון: נסמן $f(x,y)=y^7+5y^3+y+7x$. נשים לב כי $f(-1,1)=0$. נגדיר

$$.g(y)=f(-1,y)=y^7+5y^3+y-7$$

זהו פולינום מדרגה אי-זוגית, לכן קיים לו שורש ומכיוון ש-

$$,g'(y)=7y^6+15y^2+1>0$$

למשוואה $y^7+5y^3+y-7=0$ פתרון יחיד והוא $y=1$. נשים לב כי $g(y)$ הינה פונקציה עולה ממש ולכן המשוואה $y^7+5y^3+y+7x=0$ מגדירה את y כפונקציה של x בסביבה של הנקודה $(-1,1)$.

התשובה לגבי הנקודה (x_0,y_0) המקיימת $y_0^7+5y_0^3+y_0+7x_0=0$ דומה.

6. הוכיחו כי המשוואה $27y^2=(1-x)(8+x)^2$ מגדירה את x כפונקציה של y כאשר $1<y<2$ ואת y כפונקציה של x כאשר $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. מצאו משוואות המשיקים לגרפים של הפונקציות האלה בנקודה $\left(0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$.

פתרון: נסמן

$$f(x,y)=(1-x)(8+x)^2-27y^2 .$$

מתקיים

$$f\left(0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)=0 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-(2x+6)(x+8),\frac{\partial f}{\partial x}=-54y ,$$

מכאן

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)}=-48,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)}=-\frac{144}{\sqrt{3}} .$$

מכאן נובעת התוצאה הראשונה. נחשב משוואת המשיק לגרף של $y=y(x)$ בנקודה $x=0$:

$$y-\frac{8}{3\sqrt{3}}=y'(0)(x-0) ,$$

ממשפט הפונקציה הסתומה נקבל

$$y'(0)=-\frac{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)}}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)}}=-\frac{1}{\sqrt{3}} ,$$

מכאן משוואת המשיק ל- $y=y(x)$ בנקודה $x=0$ היא

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{8}{3\sqrt{3}}\ .$$

נחשב משוואת המשיק לגרף של $x=x(y)$ בנקודה $y=\frac{8}{3\sqrt{3}}$:

$$x-0=x'(0)\left(y-\frac{8}{3\sqrt{3}}\right),$$

ממשפט הפונקציה הסתומה נקבל

$$x'(0)=-\frac{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)}}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(0,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)}}=-\sqrt{3},$$

מכאן משוואת המשיק ל- $x=x(y)$ בנקודה $y=\frac{8}{3\sqrt{3}}$ היא

$$x=-\sqrt{3}y+\frac{8}{3}\ .$$

כצפוי, התקבלה אותה המשוואה.

7. נניח כי המשוואה $f(x,y,z)=0$ מגדירה את כל אחד מהמשתנים כפונקציה דיפרנציאבילית של שניים האחרים. הראו אז ש-

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1\ .$$

פתרון: ע"פ משפט הפונקציה הסתומה מתקיים:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}},\ \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

מכאן $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.