דף תרגילים 5
חדו"א וקטורי להנדסת חשמל

משפט הפונקציה הסתומה וההפוכה

1. יהיו $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ פונקצית גזירות ברציפות ב-$\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^2$. חשבו ישירות מן ההגדרה את הנגזרות החלקיות של ההרכבה והראו כי מתקיים $\mathcal{J}_{g\circ f}(\mathbf{x}_0):=\mathcal{J}_g(f(\mathbf{x}_0))\cdot\mathcal{J}_f(\mathbf{x}_0)$.

2. משפט הפונקציה ההפוכה: תהא $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו-$f:U\to\mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה ברציפות על U. נניח כי $\mathbf{x}_0$ היא נקודה בה היעקוביאן $\mathcal{J}_f(\mathbf{x}_0)$ הוא הפיך.

   (א) נסמן $\mathbf{y}_0=f(\mathbf{x}_0)$, ונגדיר פונקציה $G:U\times f(U)\to\mathbb{R}^n$ ע"י $G(\mathbf{x},\mathbf{y})=G(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\mathbf{y}-f(\mathbf{x})$.
   הראו כי מטריצת היעקוביאן של G היא $\mathcal{J}_G(\mathbf{x},\mathbf{y})=(-\mathcal{J}_f(\mathbf{x});\mathbf{Id})$.

   (ב) הראו כי תנאי משפט הפונקציה הסתומה ל-G מתקיימים בסביבת (x_0,y_0) ולכן קיימות קבוצות פתוחות $W,V\subseteq\mathbb{R}^n$ כך ש-$\mathbf{x}_0\in V$ ו-$\mathbf{y}_0\in W$ ופונקציות גזירות ברציפות $g_1,\ldots,g_n:W\to V$ כך ש- $g(y_0)=x_0$ ולכל $\mathbf{y}\in W$ מתקיים $G(\mathbf{y},g_1(\mathbf{y}),g_2(\mathbf{y}),\ldots,g_n(\mathbf{y}))=0$.

   (ג) תהא $g:W\to\mathbb{R}^n$ הפונקציה המוגדרת ע"י
   $$g(\mathbf{y})=(g_1(\mathbf{y}),\ldots,g_n(\mathbf{y})).$$
   הראו כי לכל $\mathbf{y}\in W$ מתקיים כי $f(g(\mathbf{y}))=\mathbf{y}$.

   (ד) הראו כי $\mathcal{J}_g(\mathbf{y}_0)=(\mathcal{J}_f(\mathbf{x}_0))^{-1}$ (רמז: תרגיל 1).

   (ה) נניח כי $U,W\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצות פתוחות, ו-$f:U\to W$ היא פונקציה על וגזירה ברציפות כך שלכל $\mathbf{x}\in U$ היעקוביאן של f ב-$\mathbf{x}$ הינו הפיך. האם ניתן להסיק מכך כי f הינה הפיכה על U?

3. נתבונן בקבוצה
$$\left\{(x,y,z,w)\mid\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\neq 0 \text{ ו-} \det\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=0\right\}\subseteq\mathbb{R}^4.$$
הראו כי קיימת קבוצה פתוחה $W\subseteq\mathbb{R}^3$ המכילה את הנקודה $(1,1,1)$, ופונקציה גזירה ברציפות $g:W\to\mathbb{R}$ שעבורה $g(1,1,1)=1$ כך שלכל $(x,y,z)\in W$ המטריצה $\begin{pmatrix}x&y\\z&g(x,y,z)\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ איננה הפיכה.

4. נתונה מערכת משוואות $x+3y+z=4,x^2+2y^2+6z=3$.
השתמשו במשפט על פונקציה סתומה והוכיחו שחיתוך המשטחים הינו מקומית גרף של פונקציה גזירה בסיבת הנקודה $(1,1,0)$ וחשבו נגזרות חלקיות שלה $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$ בנקודה זו.
מצאו את הישר המשיק לעקומה זו בנקודה $(1,1,0)$.
מצאו הצגה פרמטרית של עקומת החיתוך בין המשטחים ובדקו את תשובתכם שקיבלתם בעזרת המשפט.

5. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ כך ש-$f(u,v)=\begin{pmatrix}e^u\cos(v)\\e^u\sin(v)\end{pmatrix}$.
הסבירו למה לא קיימת פונקציה הפוכה שמוגדרת על $\mathbb{R}^2$.
מצאו את הפונקציה ההפוכה שמוגדרת בסביבת הנקודה $(1,1)$ וחשבו מטריצת יעקוביאן שלה.

6. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש-$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x+y+(z-1)^2+1\\y+z+(x-1)^2-1\\z+x+(y-2)^2+3\end{pmatrix}$.
האם קיימת פונקציה הופכית $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ בסביבת הנקודה $\mathbf{x}_0=(1,2,1)$, נמקו?
אם כן, מצאו קירוב לינארי של הפונקציה ההפוכה בסביבת הנקודה $f(\mathbf{x}_0)$.

7. נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י

$$.f(x,y)=\begin{cases}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ e^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0) \text{ אם}\\ (0,0) & \text{אחרת}\end{cases}$$

(א) הראו כי מטריצה היעקוביאן של f היא הפיכה בכל נקודה $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

(ב) הסיקו כי לכל נקודה $0\neq x_0\in\mathbb{R}^2$ קיים כדור פתוח $B_r(x_0)$ ופונקציה $g:B_r(x_0)\to\mathbb{R}^2$ כך ש-$f\circ g(x,y)=(x,y)$ לכל $(x,y)\in B_r(x_0)$. מצאו את הפונקציה ההופכית.

8. משפט ההעתקה הפתוחה: תהא $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהא $f:U\to\mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה ברציפות על U. נניח כי לכל $x\in U$ מתקיים כי היעקוביאן $\mathcal{J}_f(x)$ הינו הפיך.

(א) תהא y נקודה בתמונתה של f (כלומר, קיים $x\in U$ כך ש-$f(x)=y$). השתמשו בתרגיל הקודם כדי להראות כי קיימת סביבה פתוחה W המכילה את y וקבוצה פתוחה $V\subseteq U$ כך שהצמצום $f_{|V}$ של f לקבוצה V הוא על הקבוצה W, כלומר כי לכל $y'\in W$ קיים $x'\in V$ כך ש-$f(x')=y'$.

רמז: הראו ראשית כי אם $f(g(x))=x$ לכל x בתחום W, אזי בהכרח f היא על W.

(ב) נסמן ב-$f(U)=\{y\in\mathbb{R}^n\mid\exists x\in U,\ f(x)=y\}$ את תמונת f על U. הסיקו מהסעיף הקודם כי כל נקודה $y\in f(U)$ היא נקודה פנימית של $f(U)$.

(ג) הסיקו כי $f(U)\subseteq\mathbb{R}^n$ היא קבוצה פתוחה. הסיקו בנוסף כי לכל $V\subseteq U$ פתוחה מתקיים כי $f(V)\subseteq f(U)$ גם היא קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}^n$.