דף תרגילים 5
חשבון וקטורי להנדסת חשמל

1. נרשום $f=(f_1,f_2)$, ו-$g=(g_1,g_2)$ עבור $f_1,g_1,f_2,g_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. כמו כן, לצורך נוחיות הסימון נרשום $h=g\circ f=(h_1,h_2)$ עבור $h_1,h_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. אז, מכלל השרשרת מתקיים

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_h(\mathbf{x}_0)&=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(f(\mathbf{x}_0))\frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}(f(\mathbf{x}_0)) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(f(\mathbf{x}_0))\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(f(\mathbf{x}_0)) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(f(\mathbf{x}_0))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\end{pmatrix}=\mathcal{J}_g(f(\mathbf{x}_0)\mathcal{J}_f(\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

כנדרש.

2. משפט הפונקציה ההפוכה: תהא $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו-$f:U\to\mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה ברציפות על U. נניח כי x_0 היא נקודה בה היעקוביאן $\mathcal{J}_f(\mathbf{x}_0)$ הוא הפיך.

נסמן $f(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_n(\mathbf{x}))$ ו-

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=(G_1(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ldots,G_n(\mathbf{x},\mathbf{y})))=\mathbf{y}-f(\mathbf{x}).$$

כאן $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ו-$G_j:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$, ל-$1\le i\le n$ ו-$1\le j\le n$

(א) נובע ישירות מהגדרת G כי $\mathcal{J}_G(\mathbf{x},\mathbf{y})=(-\mathcal{J}_f(\mathbf{x});\mathbf{Id})$.

(ב) מההנחה כי $\mathcal{J}_f(\mathbf{x}_0)$ הפיכה ומהסעיף הקודם מתקיים כי $G(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\mathbf{y}_0-f(\mathbf{x}_0)=0$ ותת-המטריצה $\left(\frac{\partial G_{n+i}}{\partial_j}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\right)_{i,j=1}^{n}=-\mathcal{J}_f(\mathbf{x}_0)$ הינה הפיכה. על מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה, ולכן קיימות קבוצות פתוחות $V,W\subseteq\mathbb{R}^n$ כך ש-$\mathbf{x}_0\in V$ ו-$\mathbf{y}_0\in W$ ופונקציות גזירות $g_1,\ldots,g_n:W\to V$ כך ש-

$$G(g_1(\mathbf{y}),\ldots,g_n(\mathbf{y}),\mathbf{y})=0$$

לכל $\mathbf{y}\in W$.

(ג) מהגדרת G, לכל $\mathbf{y}\in W$ מתקיים כי

$$G(g(\mathbf{y}),\mathbf{y})=\mathbf{y}-f(g(\mathbf{y}))=0.$$

(ד)

$$\mathbf{Id}=\mathcal{J}_{f\circ g}(\mathbf{y}_0)=\mathcal{J}_f(g(\mathbf{y}_0))\cdot\mathcal{J}_g(\mathbf{y}_0)=\mathcal{J}_f(\mathbf{x}_0)\mathcal{J}_g(\mathbf{y}_0)$$

והטענה נובעת כי $\mathcal{J}_f(\mathbf{x}_0)$ הפיכה.

(ה) לא. כדוגמת נגד ניתן לקחת את $f(x,y)=\begin{pmatrix}x\cos(y)\\ x\sin(y)\end{pmatrix}$ כבשאלה 6, ואת הקבוצות הפתוחות $U=W=\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$.

3. נגדיר פונקציה $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ ע"י $F(x,y,z,w)=\det\left(\begin{smallmatrix}x&y\\z&w\end{smallmatrix}\right)=xw-yz$. נשים לב כי F היא גזירה ברציפות על $\mathbb{R}^4$. כמו כן- $F(1,1,1,1)=\det\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)=0$.

היעקוביאן =הגראדיאנט במקרה זה של F הוא

$$\nabla_F(x,y,z,w)=(w,-z,y,x)$$

אינו אפס בנקודה $(1,1,1,1)$, ולכן ממשפט הפונקציה הסתומה יש קבוצה פתוחה $(1,1,1,1) \in U$ וקבוצה פתוחה $(1,1,1) \in W$ עם פונקציה גזירה ברציפות $g : W \to \mathbb{R}$ כך ש-$g(1,1,1) = 1$ וכך ש-

$$\forall (x,y,z) \in W, \quad F(x,y,z,g(x,y,z)) = \det \begin{pmatrix} x & y \\ z & g(x,y,z) \end{pmatrix} = 0$$

כנדרש.

4. נגדיר $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ע"י $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 + 6z \\ x + 3y + z \end{pmatrix}$. נשים לב כי $F(1,1,0) = \binom{3}{4}$ וכי F היא גזירה ברציפות בכל $\mathbb{R}^3$. היעקוביאן של F הוא

$$\mathcal{J}_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 6z \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ומכיוון שהמינור $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ של $\mathcal{J}_F(1,1,0)$ הוא הפיך, ממשפט הפונקציה הסתומה קיימת קבוצה פתוחה $(1,0) \in U$ וסביבה $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$ עם פונקציות גזירות $y,z : V \to U$ כך ש-

$$.\forall x \in V, \quad F(x,y(x),z(x)) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y(x)^2 + 6z(x) \\ x + 3y(x) + z(x) \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ע"י שימוש בגזירה סתומה לפי x רואים כי

$$\begin{cases} 2x + 4y \cdot y'(x) + 6z \cdot z'(x) = 0 \\ 1 + 3y'(x) + z'(x) = 0 \end{cases},$$

ובהצבה $x = 1$ מקבלים

$$\begin{cases} 2 + 4y'(1) = 0 \\ 1 + 3y'(1) + z'(1) = 0 \end{cases}$$

ולכן $y'(1) = -\frac{1}{2}$ ו-$z'(1) = \frac{1}{2}$, והישר המשיק נתון ע"י $\ell : \quad (1,1,0) + t(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

5. הפונקציה f איננה חח"ע על $\mathbb{R}$, למשל עבור $(u_1,v_1) = (0,0)$ ו-$(u_1,v_2) = (0,2\pi)$ מתקיים

$$.f(u_1,v_1) = f(u_2,v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נתבונן בקבוצה $S = \mathbb{R} \times [0,\pi)$ כך ש- $(1,1) \in S$. נשים לב כי אם $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in S$ כך ש-$f(u_1,v_1) = f(u_2,v_2)$ אזי בפרט

$$, e^{2u_1} = e^{2u_1}\cos^2(v_1) + e^{2u_1}\sin^2(v_1) = e^{2u_2}\cos^2(v_2) + e^{2u_2}\sin^2(v_2) = e^{2u_2}$$

ומחד-חד-ערכיות האקספוננט נובע כי $u_1 = u_2$.

בנוסף, מהשוויון $f(u_1,v_2) = f(u_2,v_2)$ מקבלים (ע"י כפל באלכסון של הקואורדינטת של f) כי

$$.e^{u_1+u_2}\cos(v_1)\sin(v_2) = e^{u_1+u_2}\sin(v_1)\cos(v_2)$$

מכיוון ש$e^{u_1+u_2} \neq 0$ ניתן לחלק את שני האגפים בו, ובמקרה זה מקבלים כי

- אם $v_1 = 0$ אז $\sin(v_1) = 0$ ו-$\cos(v_1) = 1$, ובמשוואה לעיל מקבלים כי

$$, \sin(v_2) = 0 \cos(v_2) = 0$$

ומכיוון ש-$0 \leq v_2 < \pi$ נובע כי $v_2 = 0$.

- באותו אופן, אם $v_2 = 0$ אז $v_1 = 0$.

- אחרת, אם $v_1, v_2 \neq 0$ אז מקבלים כי

$$\cot(v_1) = \frac{\cos(v_1)}{\sin(v_1)} = \frac{\cos(v_2)}{\sin(v_2} = \cot(v_2)$$

וחח"ע f נובעת מחח"ע $\cot$.

מציאת פונקציה הפוכה: נסמן את הפונקציה ההפוכה ב-$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. נשים לב כי מהחלק הקודם של השאלה תמונת g תהיה מוכלת ב-S, ותחום הגדרה שלה הוא תמונת f- כלומר, כל $\mathbb{R}^2$.

נסמן $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ ו-$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. מהחלק הקודם כבר ראינו ש-

$$f_1^2(u, v) + f_2^2(u, v) = e^{2(u+v)}$$

ואם $f_2(u, v) \neq 0$ אז

$$\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)} = \cot(v).$$

מכאן שניתן לקחת

$$g_1(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$$

ו-

$$g_2(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arccot}(\frac{x}{y}) & y \neq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}.$$

נותר רק לוודא שאכן $f(g(x, y)) = (x, y)$ לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, וזהו חישוב פשוט.

היעקוביאן של g: ניתן לחשב ישירות מתוך הגדרת היעקוביאן או להשתמש בעובדה כי f פונקציה גזירה ברציפות על S וכי g גזירה ברציפות בכל נקודה ב-$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. לפי שאלה 1, נובע כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{g \circ f}(u, v)\mathcal{J}_g(f(u, v))\mathcal{J}_f(u, v) = \mathcal{J}_g(e^u\cos(v), e^u\sin(v)) \cdot \begin{pmatrix} e^u\cos(v) & e^u\sin(v) \\ -e^u\sin(v) & e^u\cos(v) \end{pmatrix}.$$

בפרט, $\mathcal{J}_g(x, y)\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ולכן

$$\mathcal{J}_g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

אם $(x, y) \neq 0$. בנקודה $(0, 0)$ עצמה קל לוודא כי ל-g_1, למשל, אין נגזרות חלקיות, ולכן מטריצת היעקוביאן לא מוגדרת.

6. נחשב את $\mathcal{J}_f(1, 2, 1)$ ונוודא כי המטריצה הפיכה:

$$\mathcal{J}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2(z-1) \\ 2(x-1) & 1 & 1 \\ 1 & 2(y-2 & 1 \end{pmatrix},$$

ואכן $\det \mathcal{J}_f(1, 2, 1) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 2$. לכן, לפי משפט הפונקציה ההפוכה יש ל-f פונקציה הופכית בסביבת הנקודה x_0.

הקירוב הלינארי ל-g בנקודה $f(x_0)$ נתון ע"י

$$g(f(x_0)) + \mathcal{J}_g(f(x_0))\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

כאשר $g(f(x_0)) = g(f(1, 2, 1)) = (1, 2, 1)$, ולפי שאלה 1

$$\mathcal{J}_g(f(1, 2, 1)) = (\mathcal{J}_f(1, 2, 1))^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ודאו כי זו אכן המטריצה ההופכית ל-$\mathcal{J}_f(1, 2, 1)$).

7. נגדיר העתקה $h:[0,\infty)\times[0,\pi)\to\mathbb{R}^2$ ע"י

$$h(r,\theta)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta)).$$

וודאו כי h היא העתקה חח"ע ועל $\mathbb{R}^2$, גזירה ברציפות בתחומה וכי

$$\mathcal{J}_h(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

כמו כן, $f\circ h(r,\theta)=(e^r\cos(\theta),e^r\sin(\theta))$. את $\mathcal{J}_{f\circ h}(r,\theta)$ חישבנו בתרגיל 5 וקיבלנו

$$\mathcal{J}_f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\mathcal{J}_h(r,\theta)=\mathcal{J}_{f\circ h}(r,\theta)=\begin{pmatrix}e^r\cos(\theta) & e^r\sin(\theta)\\ -e^r\sin(\theta) & e^r\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

בפרט, אם לוקחים דטרמיננטות מקבלים כי

$$\det\mathcal{J}_f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\frac{e^{2r}}{r}$$

כאשר $r\neq 0$. מכאן ש-

$$\det\mathcal{J}_f(x,y)=\frac{e^{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

שונה מ-0 כאשר $(x,y)\neq(0,0)$.

נובע מכאן, ע"י משפט הפונקציה ההפוכה כי f הפיכה מקומית בכל נקודה $(x,y)\neq(0,0)$.

כבר ראינו בשאלה 5 שפונקציה יכולה להיות הפיכה מקומית בכל נקודה ועדיין לא חח"ע (ובפרט לא הפיכה). לכן כדי להוכיח כי f פונקציה הפיכה צריך לחשב באופן ישיר את ההופכית שלה.

נסמן

$$g_1(u,v)=\frac{u}{2\sqrt{u^2+v^2}}\ln(u^2+v^2)\quad,\quad g_1(u,v)=\frac{v}{2\sqrt{u^2+v^2}}\ln(u^2+v^2).$$

מחישוב מקבלים כי

$$\begin{aligned}g_1(f(x,y))&=\frac{f_1(x,y)}{2\sqrt{f_1(x,y)^2+f_2(x,y)^2}}\ln(f_1(x,y)^2+f_2(x,y)^2)\\&=e^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2e^{\sqrt{x^2+y^2}}}\ln(e^{2\sqrt{x^2+y^2}})=x\end{aligned}$$

ובדומה $g_2(f(x,y))=y$, וכן $f(g(x,y))=(x,y)$ לכל $(x,y)\neq 0$.

8. *משפט ההעתקה הפתוחה*: תהא $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהא $f:U\to\mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה ברציפות על U. נניח כי לכל $x\in U$ מתקיים כי היעקוביאן $\mathcal{J}_f(x)$ הינו הפיך.

(א) העובדה כי f היא על W היא מיידית, שכן לכל $x\in W$ ניקח $y=g(x)\in V$ ואז, מכיוון ש-$f\circ g$ היא העתקת הזהות, מתקיים כי

$$f(y)=f\circ g(x)=x$$

ועל כן $f|_V$ היא על W.

(ב) נסמן ב-$f(U)=\{y\in\mathbb{R}^n\mid\exists x\in U,\ f(x)=y\}$ את תמונת f על U.

ניקח נקודה $y\in f(U)$, ונטען כי y היא נקודה פנימית של f. מהגדרת $f(U)$ יש $x\in U$ כך ש-$y=f(x)$. לפי הסעיף הקודם יש סביבה W של y וקבוצה פתוחה $x\ni V$ כך ש-$f|_V$ היא על W. בפרט זה אומר כי לכל $y'\in W$ יש $x'\in V$ כך ש-$y'=f(x')$.

מהגדרת $f(U)$ זה אומר ש-$W=f(V)\subseteq f(U)$, ועל כן y נקודה פניית של $f(U)$ כנדרש.

(ג) נובע ישירות מסעיף ב'.