דף תרגילים 6
חדו"א וקטורי להנדסת חשמל

בעיות קיצון ללא אילוצים

1. מצאו וסווגו את הנקודות הקריטיות של הפונקציות הבאות

   (א) $f(x,y)=(3-x)(3-y)(x+y-3)$.

   (ב) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

   (ג) $f(x,y)=e^{\sin(x^2-y^2)}$

   (ד) $f(x,y)=\sin(x)\cos(y)$.

   (ה) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z$.

   (ו) $f(x,y,z)=8z^3+x^2+4y^2+48yz+2x$.

2. (א) הראו כי לפונקציה $f(x,y)=x^3+e^{3y}-3xe^y$ יש מינימום מקומי בודד, אך אין לה מינימום מוחלט.

   (ב) האם קיימת פונקציה אלמנטרית $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך שיש לה נקודה קריטית יחידה ב-$\mathbb{R}^2$ המהווה נקודת מינימום מקומי, אך אין מינימום מוחלט?

3. מצאו וסווגו את כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x,y,z)=(x-y+z)e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{6}}$.

4. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2-2x^2y-\frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{אם } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{אם } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   (א) הראו כי לכל $\theta\in[0,\pi)$ הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g(t)=f(t\cos(\theta),t\sin(\theta))$ מקבלת מינימום ב-$t=0$.

   (ב) הראו כי לפונקציה $f(x,y)$ אין מינימום מקומי ב-$(0,0)$.

5. יהיה $f(x,y)$ פולינום. נניח שעבור כל ישר l העובר דרך $(0,0)$, הנקודה היא מינימום מקומי של הצמצום $f(x,y)|_l$. האם זה מבטיח ש $(0,0)$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x,y)$?

6. תהי $f(x,y)=g_1(x)+g_2(y)$. הוכיחו כי (x_0,y_0) היא נקודת max של $f(x,y)$ אמ"ם x_0 היא נקודת max של $g_1(x)$ ו y_0 היא נקודת max של $g_2(y)$. נסחו והוכיחו טענות מתאימות לגבי נקודת min ונקודת אוכף.

7. תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת באמצעות הנוסחא

$$f(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)^n-x_1\cdot\dots\cdot x_n,$$

   בתחום $x_1>0,x_2>0,\dots,x_n>0$.

   (א) הראו כי הגרדיאנט של f מתאפס בנקודה $x_0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ עם קוארדינטות חיוביות אם ורק אם $x_1^0=\dots=x_n^0$.

   (ב) חשבו את מטריצת ההסיאן של f. הראו כי אם $x_0=(c,\dots,c)$ היא נקודה חשודה לקיצון של f אזי

$$\mathcal{H}_f(x_0)=\frac{c^{n-2}}{n}\cdot\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1\end{pmatrix}$$

   (בפרט, $\mathcal{H}_f(x_0)$ היא מטריצה בעלת ערכים קבועים על האלכסונים).

(ג) ניקח כעת $\mathbf{x}_0 = (c, \ldots, c) \in \mathbb{R}^n$ עם $c > 0$. נסמן $\frac{n}{c^{n-2}}\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix} = H$.

כתבו את H כסכום של מטריצה אלכסונית ומטריצה שכל כניסותיה הן זהות, והשתמשו בפירוק זה כדי להראות כי לכל וקטור $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים כי

$$\langle \mathbf{v}, H\mathbf{v} \rangle = n \left\| \mathbf{v} \right\|^2 - \langle \mathbf{v}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle^2.$$

השתמשו באי-שוויון קושי-שוורץ על מנת להסיק כי לכל $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים כי $\langle \mathbf{v}, H\mathbf{v} \rangle \geq 0$.

(ד) הראו כי $\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0)$ היא מטריצה סימטרית מוגדרת אי-שלילית.

בעיות קיצון עם אילוצים

8. מצאו נקודת מקסימום ומינימום עבור הפונקציה $f(x, y) = xy$ בתחום $|x|^a + |y|^a \leq 1$, $a > 0$.

9. מצאו נקודה $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ הנמצאת על חיתוך המישור $x + y = z$ והגליל $x^2 + y^2 = 1$ שמרחקה מראשית הצירים הוא מינימלי.

10. הראו כי הפונקציה $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ מקבלת מינימום מוחלט על חיתוך המישורים $x-y+z = 2$ ו-$2x + y + 4z = 16$, ומצאו את ערכו.

11. מצאו את השטח המינימלי של אליפסה מהצורה $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$ המקיימת כי $(1, 3)$ היא נקודת שפה שלה. האם קיימת אליפסה כנ"ל בעלת שטח מקסימלי?

(תזכורת: שטח אליפסה כנ"ל הוא πab).

12. נתון פיזור טמפרטורה במרחב ע"י הפונקציה $T(x, y, z) = 3xy + z^3 + 2z^2 - 2$. מצאו את הנקודה החמה ביותר והקרה ביותר בכדור היחידה הסגור $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

13. מצאו את הנקודות על משטח $S = \{x^a y^b z^c = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, $a, b, c > 0$ הקרובות ביותר לראשית הצירים.

14. הוכיחו כי מתקיים $\sum_{i=1}^3 a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^3 a_i^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^3 b_i^3\right)^{\frac{1}{3}}$ עבור $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0$.

15. תהא $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית שונה מ-0. נגדיר

$$F(x, y, z) = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle$$

(א) הראו כי F גזירה ברציפות על כל $\mathbb{R}^3$, וכי נגזרותיה החלקיות מקיימות

$$\nabla_F(x, y, z) = 2A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

הערה: ניתן לבצע חישוב זה באופן ישיר, או על ידי שימוש בכלל השרשרת להרכבה $f \circ g$, כאשר $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ ו-$f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ מוגדרות ע"י

$$g(x, y, z) = g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} \end{pmatrix} \quad , \quad f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

(ב) הראו כי F מקבלת ערכי קיצון מוחלטים בכדור הסגור $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ על שפת הכדור.

(ג) השתמשו בשיטת כופלי לגרנג' כדי להראות של-A יש ערך עצמי ממשי ווקטור עצמי המתאים לו.