# דף תרגילים 6
# חדו"א 2 להנדסת חשמל

## בעיות קיצון ללא אילוצים

1. (א) $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$. הגרדיאנט הוא

$$\nabla_f(x,y) \begin{pmatrix} (3-y)(6-2x-y) \\ (3-x)(6-2x-y) \end{pmatrix}$$

ומתאפס ב-$(3,3)$, $(3,0)$, $(0,3)$ וב-$(2,2)$. ההסיאן

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-6 & 2x+2y-9 \\ 2x+2y-9 & 2x-6 \end{pmatrix}.$$

מתקיים כי

$$\mathcal{H}_f(0,3) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}_f(3,3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_f(2,2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{F}_f(3,0) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן רואים כי $(2,2)$ היא נקודת מקסימום (מוגדרת שלילית), ושאר הנקודות הן אוכף.

(ב) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$. הגרדיאנט הוא

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x - 2y \\ 4y^3 - 2x - 2y \end{pmatrix}$$

והוא מתאפס בנקודות $(1,1)$, $(0,0)$ וב-$(-1,-1)$.
מטריצת ההסיאן היא

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12x^2 - 2 \end{pmatrix}$$

ומתקיים כי

$$\mathcal{H}_f(1,1) = \mathcal{H}_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

היא מטריצה חיובית ולכן $(-1,-1)$ ו-$(1,1)$ הן נקודות מינימום מקומי.
בנקודה $(0,0)$ מתקיים כי $\mathcal{H}_f(0,0) = \frac{-2}{-2}\frac{-2}{-2}$ ולכן ההסיאן אינה הפיכה ובפרט לא נותנת מידע לגבי סוג הקיצון. מצד שני, ניתן לראות כי לכל $x \in (-1,1)$ מתקיים כי

$$f(x,-x) = 2x^4 > 0 \quad , \quad f(x,0) = x^2 - x^4 < 0$$

ובפרט בכל סביבה של $(0,0)$ $f$ מקבלת ערכים שליליים וחיוביים, ובפרט $(0,0)$ היא נקודת אוכף.

(ג) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$. הגרדיאנט הוא

$$\nabla_f(x,y) \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

ההסיאן מתאפס בנקודות $(\pi n, \frac{(2k-1)\pi}{2}), (\frac{(2k-1)\pi}{2}, \pi n), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.
ההסיאן

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}.$$

מתקיים כי

$$\mathcal{H}_f(\pi n,\frac{(2k-1)\pi}{2})=\begin{pmatrix}0 & -\cos(\pi n)\sin(\frac{(2k-1)\pi}{2})\\ -\cos(\pi n)\sin(\frac{(2k-1)\pi}{2}) & 0\end{pmatrix}$$
$$\mathcal{H}_f(\frac{(2k-1)\pi}{2},\pi n)=\begin{pmatrix}\cos(\pi n)\sin(\frac{(2k-1)\pi}{2}) & 0\\ 0 & \cos(\pi n)\sin(\frac{(2k-1)\pi}{2})\end{pmatrix}$$

מכאן רואים כי $(\frac{(2k-1)\pi}{2},\pi n)$ נקודת מקסימום או מינימום בהתאם לסימן של נגזרות חלקיות באלכסון הראשי של המטריצה ושאר הנקודות הן אוכף.

(ד) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z$, הגרדיאנט הוא

$$\nabla_f(x,y,z)\begin{pmatrix}2x-2\\2y-4\\2z-6\end{pmatrix}$$

ומתאפס ב-$(x,y,z)=(1,2,3)$. מכיוון ש-$f$ גזירה ברציפות על $\mathbb{R}^3$ נקודות הקיצון מתקבלות בנקודות התאפסות הגרדיאנט.

נחשב הסיאן:

$$.\mathcal{H}_f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

ברור כי $\mathcal{H}_f(1,2,3)$ היא מטריצה חיובית, ולכן $(1,2,3)$ נקודת מינימום.

2. (א) נתונה $f(x,y)=x^3+e^{3y}-3xe^y$ הגרדיאנט הוא

$$\nabla_f(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2-3e^y\\3e^{3y}-3xe^y\end{pmatrix}$$

השוואת הגרדיאנט ל-0 נותנת נקודות חשודות לקיצון ב-$(1,0)$ וב-$(-1,0)$.

ההסיאן הוא

$$.\mathcal{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}6x & -3e^y\\ -3e^y & 9e^{3y}-3xe^y\end{pmatrix}$$

מתקיים כי $\mathcal{H}_f(1,0)=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}$ היא מטריצה מוגדרת חיובית, ולכן $(1,0)$ נקודת מינימום מקומית. כמו כן, $\mathcal{H}_f(-1,0)=\begin{pmatrix}-6&-3\\-3&12\end{pmatrix}$ היא בעלת דטרמיננטה שלילית, ולכן $(-1,0)$ נקודת אוכף.

כדי לראות כי ל-$f$ אין נקודת מינימום מוחלט ב-$\mathbb{R}^3$, מספיק לשים לב כי

$$\lim_{x\to-\infty}f(x,0)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x)=-\infty$$

ובפרט $f$ מקבלת ערכים קטנים כרצוננו לאורך ציר ה-$x$.

(ב) אכן קיימת פונקציה כנ"ל- נגדיר

$$.F(x,y)=x^2+y^2(1-x)^3$$

נשים לב כי

$$\nabla_F(x,y)=\begin{pmatrix}2x-3y^2(1-x)^2\\2y(1-x)^3\end{pmatrix}$$

מתאפס אך ורק בנקודה $(x,y)=(0,0)$, וכי $\mathcal{H}_F(x,y)=\begin{pmatrix}2+6y^2(1-x) & -6y(1-x)^2\\ -6y(1-x)^2 & 2(1-x)^3\end{pmatrix}$ ולכן

$$\mathcal{H}_F(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

מטריצה חיובית, ולכן זו נקודת מינימום מוחלט.
לבסוף, נבחין כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x,1) = \lim_{x\to\infty} x^2 + (1-x)^3 = -\infty$$

ובפרט $f$ מקבלת ערכים קטנים כרצוננו על הישר $y = 1$. לכן $(0,0)$ אינה נקודת מינימום מוחלט.

3. $f(x,y,z) = (x-y+z)e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{6}}$. הגרדיאנט הוא

$$\nabla_f(x,y,z) = e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \begin{pmatrix} 1+\frac{2x}{6}(x+y-z) \\ 1+\frac{2y}{6}(x+y-z) \\ -1+\frac{2z}{6}(x+y-z) \end{pmatrix}$$

נשים לב כי אם $(x,y,z)$ היא נקודת קיצון של $f$ אזי בפרט (מכיוון ש-$e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ לא מתאפסת) מתקיימת מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \text{I.} \quad 1+\frac{x}{3}(x+y-z) = 0 \\ \text{II.} \quad 1+\frac{y}{3}(x+y-z) = 0 \\ \text{III.} \quad 1+\frac{z}{3}(x+y-z) = 0 \end{cases}$$

ע"י סכימת $\text{I}+\text{II}-\text{III}$ מקבלים בפרט כי

$$3 + \frac{(x+y-z)^2}{3} = 0$$

וזו סתירה, מכיוון שאגף ימין של המשוואה לעיל הוא תמיד חיובי (גדול או שווה ל-3).

על כן קיבלנו של-$f$ אין נקודות קריטיות ב-$\mathbb{R}^3$. מכיוון ש-$f$ היא גזירה על כל $\mathbb{R}^3$ נקודות הקיצון שלה יתקבלו בנקודות הקריטיות, ובפרט ל-$f$ אין מינימום או מקסימום גלובליים.

4. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2-2x^2y-\frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{אם } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{אם } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(א) נקבע $\theta\in\mathbb{R}$ ונגדיר

$$g(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) = t^2 - 2t^3\cos^2\theta\sin\theta - 4t^4\frac{\cos^6\theta\sin^2\theta}{(t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)^2}.$$

נשים לב שאם $\theta = \pi k$ לאיזשהו $k\in\mathbb{Z}$ אז $\sin\theta = 0$ ואז

$$g(t) = t^2$$

וברור כי $g(t)$ מקבלת מינימום ב-0. מעתה והלאה אנחנו מניחים כי $\theta\neq\pi k$ לכל $k\in\mathbb{Z}$. בפרט $\sin(\theta)\neq 0$ ו-$g$ פונקציה רציפה וגזירה לכל $t$. נגזור את $g$ ונקבל

$$g'(t) = 2t - 6t^2\cos^2\theta\sin\theta - t^3h(t)$$

כאשר $h(t) = \frac{16\cos^6\theta\sin^2\theta(t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)^4-16t^2\cos^{18}\theta\sin^{\theta}(t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)}{(t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)^4}$ היא רציפה וגזירה ב-0, מההנחה כי $\sin\theta\neq 0$. ברור כי $g'(0)=0$. כמו כן,

$$g''(t) = 2 - 124\cos^2\theta\sin\theta - 3t^2h(t) - t^3h'(t)$$

ומתקיים כי $g''(0) = 2 > 0$, ולכן 0 היא נקודת מינימום של $g$.

(ב) נשים לב כי עבור

$$k(t)=f(t,t^2)=t^2+t^4-2t^4-\frac{4t^10}{(2t^4)^2}=-t^4$$

הנקודה $t=0$ היא נקודת מקסימום ולא מינימום. בפרט ל-$f$ אין מקסימום ב-$(0,0)$.

5. נתבונן בפונקציה $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$. הפונקציה לא מקבלת מינימום בראשית כי בכל הנקודות מהצורה $(0,b)$ בסביבת הראשית היא חיובית ובכל הנקודות מהצורה $(a,2a^2)$ בסביבה היא מקבלת ערכים שליליים. אבל הצימצום של הפונקציה על כל הישרים $y=mx\quad 0<|m|<\infty,$ שווה $g(x)=f(x,mx)=(mx-x^2)(mx-3x^2)=m^2x^2-4mx^3+3x^4$. הפונקציה מקבלת מינימום בראשית כיוון ש- $g'(0)=0,g''(0)=2m^2>0$. בנוסף אם לוקחים צימצום של הפונקציה על ציר $x$ מקבלים את הפונקציה $3x^4$ שיש לה מינימום ב $x=0$ וצימצום של הפונקציה על ציר $y$ גם מקבלת מינימום בראשית.

7. תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת באמצעות הנוסחא

$$.f(x_1,\ldots,x_n)=\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^n-x_1\cdot\ldots\cdot x_n$$

(א) $f$ היא העתקה פולינומיאלית, ועל כן רציפה וגזירה אינסוף פעמים בכל $\mathbb{R}^n$. לכל $i\in\{1,\ldots,n\}$ מתקיים

$$.\frac{\partial f}{\partial x_i}=\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^{n-1}-\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}x_j$$

הטענה כפי שנכתבה בתרגיל איננה נכונה- למשל עבור $n=4$ ו-$\mathbf{x}=(1,-1,0,0)$ מתקיים כי $\nabla_f(1,-1,0,0)=\mathbf{0}$ אך $\mathbf{x}$ לא מקיים את תנאי השאלה. כדי לפתור את השאלה יש להוסיף את ההנחה כי $x_i>0$ לכל $i\in\{1,\ldots,n\}$.

מההנחה כי $\nabla_f(x_1,\ldots,x_n)=\mathbf{0}$ מתקבל כי

$$\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^{n-1}=\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}x_j$$

לכל $i\in\{1,\ldots,n\}$. נכפול את שני האגפים ב-$x_i$ ונחלק ב-$(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n})^{n-1}$ כדי לקבל כי

$$.x_i=\frac{\prod_{j=1}^n x_j}{\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^{n-1}},\quad \forall i\in\{1,\ldots,n\}$$

בפרט, קיבלנו כי הערך של $x_i$ הוא שווה לכל $i$.

הראו כי הגרדיאנט של $f$ מתאפס בנקודה $\mathbf{x}_0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ אם ורק אם $x_1^0=\ldots=x_n^0$.

(ב) נבחר $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. אם $i\neq j$ אז

$$.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{n-1}{n}\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^{n-2}-\prod_{\substack{1\le l\le n\\ l\ne i,j}}x_l$$

אם $i=j$ אז

$$.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{n-1}{n}\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^{n-2}$$

בפרט, אם נציב $\mathbf{c}=(c,\ldots,c)=(x_1,\ldots x_n)$ נקבל כי

$$\mathcal{H}_f(\mathbf{c})=\frac{c^{n-2}}{n}\begin{pmatrix}n-1&-1&\ldots&-1\\-1&n-1&\ldots&-1\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-1&-1&\ldots&n-1\end{pmatrix}$$

כנדרש.

(ג) נסמן $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. אזי נגדיר

$$H = n\mathbf{Id}_n - B$$

אז עבור $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ מתקיים

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, H\mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}, n\mathbf{Id}_n\mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, B\mathbf{v} \rangle \\ &= n\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 + \ldots + v_n \\ v_1 + \ldots + v_n \\ \vdots \\ v_1 + \ldots + v_n \end{pmatrix} \rangle \\ &= n\|\mathbf{v}\|^2 - (v_1 + \ldots + v_n)^2 \\ &= n\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{v}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle^2 \qquad (\star) \end{aligned}$$

(ד) עפ"י אי-שוויון קושי שוורץ מתקיים כי

$$\langle \mathbf{v}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle^2 \le \|\mathbf{v}\|^2 \| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \|^2 = n\|\mathbf{v}\|.$$

במשוואה $\star$, זה אומר כי לכל $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים כי

$$\langle \mathbf{v}, \mathcal{H}_f(\mathbf{c})\mathbf{v} \rangle = \frac{c^{n-1}}{n} \left( n\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{v}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \right) \ge \frac{c^{n-1}}{n} \left( n\|\mathbf{v}\|^2 - n\|\mathbf{v}\|^2 \right) = 0,$$

ולכן $\mathcal{H}_f(\mathbf{c})$ מטריצה מוגדרת אי-שלילית.

## בעיות קיצון עם אילוצים

8. מחפשים נקודות קיצון עבור הפונקציה $f(x, y) = xy$ בתחום $|x|^\alpha + |y|^\alpha \ge 1$, $\quad \alpha > 0$.

ברור שהנקודה החשודה לקיצון בתוך התחום שבה נגזרות חלקיות מתאפסות היא $(0, 0)$.

כיוון שהתחום סימטרי לכן נחפש את הנקודות החשודות עבור התחום $x \ge 0, y \ge 0$. נשתמש בכופלי לגרנז כדי למצוא מקודות חשודות על השפה.

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^\alpha + y^\alpha - 1)$$

מתקיים כי

$$\nabla_F(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} y + \alpha\lambda x^{\alpha-1} \\ x + \alpha\lambda y^{\alpha-1} \\ x^\alpha + y^\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

והפתרון של המערכת מהמשואה $\nabla_F = \mathbf{0}$ מקבלים את הנקודה $M_1(\sqrt[\alpha]{\frac{1}{2}}, \sqrt[\alpha]{\frac{1}{2}})$.

מהסימטריה של התחום נקבל נקודות חשודות נוספות מהצורה: $M_2(-\sqrt[\alpha]{\frac{1}{2}}, \sqrt[\alpha]{\frac{1}{2}})$, $M_3(\sqrt[\alpha]{\frac{1}{2}}, -\sqrt[\alpha]{\frac{1}{2}})$, $M_4(-\sqrt[\alpha]{\frac{1}{2}}, -\sqrt[\alpha]{\frac{1}{2}})$.

ערכים של הפונקציה בנקודות חשודות $f(M_1)=f(M_4)=(\frac{1}{2})^{\frac{2}{\alpha}}$, $f(M_2)=f(M_3)=-(\frac{1}{2})^{\frac{2}{\alpha}}$, $f(0,0)=0$.

בקצוות של התחום הפונקציה גם מתאפסת ולכן לפי משפט ויירשטרס יש לה שתי נקודות מינימום $M_2, M_3$ ושתי נקודות מקסימום $M_1, M_4$.

9. נגדיר $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. הנקודות $x_0\in\mathbb{R}^3$ שמרחקן מחיתוך המישור $x+y=z$ והגליל $x^2+y^2=1$ מינימלי הן בדיוק נקודות המינימום של f תחת האילוצים המוגדרים ע"י המישור והגליל.

נגדיר

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda(x+y-z)+\mu(x^2+y^2-1),$$

אז משיטת כופלי לגרנג', נקודות הקיצון של f תחת האילוצים מתקבלות בנקודות ההתאפסות של $\nabla_L$. מתקיים כי

$$\nabla_L(x,y,z,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}2x+\lambda+2\mu x\\2y+\lambda+2\mu y\\2z-\lambda\\x+y-z\\x^2+y^2-1\end{pmatrix}.$$

פתרון של מערכת המשוואות $\nabla_L=\mathbf{0}$ מניב כי הנקודות החשודות לקיצון מתקבלות ב-

$$(x,y,z)\in\left\{(\sqrt{\tfrac{1}{2}},-\sqrt{\tfrac{1}{2}},0),(-\sqrt{\tfrac{1}{2}},\sqrt{\tfrac{1}{2}},0),(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\sqrt{\tfrac{1}{2}},2\sqrt{\tfrac{1}{2}}),(-\sqrt{\tfrac{1}{2}},-\sqrt{\tfrac{1}{2}},-2\sqrt{\tfrac{1}{2}})\right\}$$

ומהצבה מקבלים $f(\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},0)=f(-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}},0)=1$ ו- $f(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}},2\sqrt{\frac{1}{2}})=f(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},-2\sqrt{\frac{1}{2}})=3$.

לכן המינימום מתקבל ב-$x_0=(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}},0)$ ו-$x_0=(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},0)$.

10. נסמן ב-C את חיתוך המישורים $x-y+z=2$ ו-$2x+y+4z=6$. ע"י מציאת פתרון משותף למשוואות המגדירות את C קל להראות כי C אינה קבוצה ריקה (למשל $(2,4,0)\in C$). נסמן $R=\sqrt{20}=\|(2,4,0)\|$ וב-$B_R(\mathbf{0})$ את הכדור הסגור ברדיוס R סביב ראשית הצירים. אז $B_R(\mathbf{0})\cap C$ היא קבוצה סגורה וחסומה ולא ריקה (כי $(2,4,0)$ הוא נקודה בחיתוך), ולכן f מקבלת מינימום בנקודה $x_0\in C\cap B_R(\mathbf{0})$. נשים לב כי אותו מינימום הוא בהכרח קטן או שווה מ-R (כי הוא נקודה ב-$B_R(\mathbf{0})$), וכי בכל $x\in C\setminus B_R(\mathbf{0})$ מתקיים כי $f(x)>R^2$.

כדי למצא את המינימום נשתמש בשיטת כופלי לגרנג' (הערה: ניתן גם לפתור את התרגיל בעזרת גיאומטריה אנליטית, ע"י מציאת נוסחא לישר החיתוך ושימוש בנוסחת מרחק נקודה מישר). נגדיר

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x-y+z-2)+\mu(2x+y+4z-6).$$

כמו קודם, נקודות הקיצון מתקבלות בנקודות ההתאפסות של הגרדיאנט.

$$\nabla_L(x,y,z,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}2x+\lambda+2\mu\\2y-\lambda+\mu\\2z+\lambda+4\mu\\x-y+z+2\\2x+y+4z-16\end{pmatrix}$$

ומפתרון מערכת המשוואות מקבלים נקודת התאפסות יחידה ב-$(x,y,z,\lambda,\mu)=(1,0,3,2,-2)$ ושם מתקבל $f(1,0,3)=10$.

11. אנו מעוניינים למצא את ערכי הקיצון של השטח של אליפסה $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2\le 1$ (כפונקציה של $a,b$) המקיימת כי $(1,3)$ היא נקודה על שפת האליפסה, כלומר- מתקיים כי

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{3}{b}\right)^2=1.$$

כלומר, אם נגדיר $f(a,b)=\pi ab$ ו-$g(a,b)=(\frac{1}{a})^2+(\frac{3}{b})^2-1$, אנו מעוניינים למצא את הערכים הקיצוניים של $f(a,b)$ תחת האילוץ $g(a,b)=1$. נשים לב אנו רוצים למצא נקודת מקסימום $(a,b)$ כך ש-$a>0$ וגם $b>0$.

נסמן

$$L(a,b,\lambda)=\pi ab+\lambda\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{3}{b}\right)^2-1\right).$$

אז

$$\nabla_L(a,b,\lambda)=\begin{pmatrix}\pi b-2\lambda\frac{1}{a^3}\\ \pi a-18\lambda\frac{1}{b^3}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}-1\end{pmatrix}$$

שתי המשוואות הראשונות במערכת נותנות כי

$$a=\left(\frac{2\lambda}{3\pi}\right)^{1/4},\quad b=\left(\frac{54\lambda}{\pi}\right)^{1/4}$$

ומהצבה למשוואה השלישית מקבלים פתרון $\lambda=\frac{2}{3\pi}$, ומכאן $(a,b)=1,2\sqrt{3})$ היא נקודת הקיצון של $f$, ובה $f(a,b)=2\sqrt{3}\pi$.

הערה: הערך שמצאנו הוא למעשה המינימום של $f$, ולא המקסימום כפי שנתבקש בשאלה. למען האמת, לפונקציה $f$ הנתונה אין מקסימום תחת האילוץ הנתון $g(a,b)=0$. כדי לראות זאת נשים לב כי אם ניקח $a=1+\epsilon$ עבור $\epsilon>0$, אזי ניתן לקחת $b=\frac{3}{(1+\epsilon)\sqrt{\epsilon^2+2\epsilon}}>0$ המקיים $g(a,b)=0$ ואז

$$f(a,b)=\pi(1+\epsilon)\frac{3}{(1+\epsilon)\sqrt{\epsilon^2+2\epsilon}}=\frac{3\pi}{\sqrt{\epsilon^2+\epsilon}}$$

הוא ערך השואף לאינסוף כאשר $\epsilon$ שואף ל-0.

12. נתונה $T(x,y,z)=3xy+z^3+2z^2-2$. הפונקציה הינה גזירה ברציפות בכל נקודה ב-$\mathbb{R}^3$, ולכן נקודות הקיצון המקומיות שלה מתקבלות בנקודות התאפסות הגרדיאנט.

- נקודות קריטיות בתוך כדור היחידה: נחשב את הגרדיאנט של $T$:

$$\nabla_T(x,y,z)=\begin{pmatrix}3y\\ 3x\\ 3z^2+4z\end{pmatrix}$$

נקודות חשודות לקיצון: $(0,0,0)$ ו-$(0,0,-\frac{3}{4})$. נשים לב כי שתי הנקודות נמצאות בתוך כדור היחידה הפתוח ברדיוס 1. מתקיים

$$T(0,0,0)=-2\quad,\quad T(0,0,-\frac{3}{4})=-\frac{83}{64}.$$

- נקודות על האילוץ $x^2+y^2+z^2=1$: נגדיר

$$L(x,y,z,\lambda)=T(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

אז

$$\nabla_L(x,y,z,\lambda)=\begin{pmatrix}3y+2\lambda x\\ 3x+2\lambda y\\ 3z^2+4z+2\lambda z\\ x^2+y^2+z^2-1\end{pmatrix}$$

ופתרון מערכת המשוואות $\nabla_L(x,y,z,\lambda)=0$ מניב את הנקודות הבאות כחשודות לקיצון $(x,y,z)\in\left\{\pm(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}},0),\pm(\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},0),(0,0,-1)\right\}$.

הערכים המתאימים ל-T הם

$$T(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\sqrt{\tfrac{1}{2}},0)=T(-\sqrt{\tfrac{1}{2}},-\sqrt{\tfrac{1}{2}},0)=-\frac{1}{2}$$
$$T(-\sqrt{\tfrac{1}{2}},\sqrt{\tfrac{1}{2}},0)=T(\sqrt{\tfrac{1}{2}},-\sqrt{\tfrac{1}{2}},0)=-3\frac{1}{2}$$
$$T(0,0,-1)=1$$

בסה"כ, הנקודה $(0,0,-1)$ היא מקסימום מוחלט והנקודות $(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},0)$ ו-$(-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}},0)$ הן נקודות מינימום מוחלט.

13. נתבונן בפונקציה $f(b_1,b_2,b_3)=\left(\sum_{i=1}^3 a_i^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^3 b_i^{3/2}\right)^{\frac{2}{3}}$
תחת אילוץ

$$\sum_{i=1}^3 a_ib_i=C$$

נגדיר פונקצית לגרנז':

$F(b_1,b_2,b_3,\lambda)=\left(\sum_{i=1}^3 a_i^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^3 b_i^{3/2}\right)^{\frac{2}{3}}+\lambda(\sum_{i=1}^3 a_ib_i-C)$.

נחשב נגזרות חלקיות שלה

$\frac{\partial F}{\partial b_i}=\left(\sum_{i=1}^3 a_i^3\right)^{\frac{1}{3}}b_i^{\frac{3}{2}-1}\left(\sum_{i=1}^3 b_i^{3/2}\right)^{\frac{2}{3}-1}+\lambda a_i=0$ כאשר $i=1,2,3$.

נחלק את המשוואה הראשונה בשניה ונקבל $\frac{b1}{b2}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$ ובאותה צורה נחלק את המשוואה השלישית בשניה ונקבל $\frac{b3}{b2}=\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2$. לכן קיבלנו ש- $b_1=b_2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$ וגם $b_3=b_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2$.

נציב במשוואת האילוץ ונקבל $a_1b_2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2+a_2b_2+a_3b_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2=C$

ולכן $b_2=\frac{Ca_2^2}{a_1^3+a_2^3+a_3^3}$ וגם $b_1=\frac{Ca_1^2}{a_1^3+a_2^3+a_3^3}$ $b_3=\frac{Ca_3^2}{a_1^3+a_2^3+a_3^3}$ כך ש-

$f(b_1,b_2,b_3)=\left(\sum_{i=1}^3 a_i^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^3 b_i^{3/2}\right)^{\frac{2}{3}}$ בנקודה החשודה שווה

$f=\left(\sum_{i=1}^3 a_i^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{C^{3/2}\left(a_1^3+a_2^3+a_3^3\right)}{\left(a_1^3+a_2^3+a_3^3\right)^{3/2}}\right)^{\frac{2}{3}}=C$.

כלומר $f_{min}=C$, כי הפונקציה לא מקבלת מקסימום על האילוץ הנתון עבור $b_1,b_2,b_3>0$.
ולכן $f\le\sum_{i=1}^3 a_ib_i=C$ ומכאן מקבלים את האי שוויון הנתון.

15. (א) נסמן $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}$. אזי

$$F(x,y,z)=\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ax+by+cz\\bx+dy+ez\\cx+ey+fz\end{pmatrix}\rangle=ax^2+dy^2+fz^2+2bxy+2cxz+2eyz \qquad (\star)$$

מכאן ברור ש-F גזירה ברציפות על $\mathbb{R}^2$ (פולינומיאלית) וכי $\nabla_F(x,y,z)=2A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

(ב) מכיוון ש-$F$ רציפה על הכדור הסגור, שהוא קבוצה קומפקטית, ממשפט ויירשטראס נובע כי $F$ מקבלת ערכי קיצון בכדור הסגור. נקודה חשודה אחת קיימת בנקודה $(0,0,0)$ (מכיוון שמסעיף א' זו נקודת התאפסות הגרדיאנט), ובנקודה זו $F(0,0,0)=0$.

נראה ראשית כי $F$ איננה פונקציית ה-0 על כדור היחידה: נניח בשלילה כי לכל $(x,y,z)$ על כדור היחידה הפונקציה שווה לאפס באופן זהותי.בפרט מהמשוואה $\star$ אנחנו מקבלים כי

$$F(1,0,0)=F(0,1,0)=F(0,0,1)=0,$$

ולכן $a=d=f=0$. כמו כן, אם ניקח $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ ו-$x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$, אז מכיוון ש-$F(x_1)=F(x_2)=F(x_3)=0$ מקבלים מערכת משוואות

$$\begin{cases} b+c+e &=0\\ b-c-e &=0\\ -b-c+e &=0\end{cases}$$

מכאן נובע כי $b=c=e=0$, בסתירה להנחה כי $A$ איננה מטריצת ה-0.

מכיוון ש-$F$ איננה פונקציית ה-0, יש $x_0$ בכדור היחידה כך ש-$F(x)\neq 0$. נניח כי $F(x_0)>0$, ונניח בשלילה כי $x_0$ היא מקסימום מוחלט של $F$ שהינה נקודה פנימית בכדור היחידה. נגדיר $x_0'=\frac{1}{\|x_0\|}x_0$, אזי $\|x_0\|<1=\|x_0'\|$ ו-

$$F(x_0')=\frac{1}{\|x_0\|^2}\langle x_0,Ax_0\rangle=\frac{1}{\|x_0\|^2}F(x_0)>F(x_0)$$

מכיוון ש- $\frac{1}{\|x_0\|}>1$. זו סתירה להנחה כי $x_0$ נקודת מקסימום.

לכן- אם ל-$F$ נקודת מקסימום אזי היא לא יכולה להיות נקודה פנימית של כדור היחידה, ועל כן נקודת שפה.

בדומה, אם $F(x_0)<0$, מראים כי נקודות המינימום המוחלטות של $F$ מתקבלות על שפת הכדור.

(ג) מכיוון ש-$F$ והאילוץ $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ הם גזירים ברציפות, נקודות הקיצון של $F$ על האילוץ $G(x,y,z)=0$ מתקבלות בנקודה בה הגרדיאנטים $\nabla_F(x,y,z)=\nabla_G(x,y,z)$ הם תלויים לינארית. בפרט, זה אומר שאם $x_0$ היא נקודת קיצון של $F$ על $G(x,y,z)=0$ אז קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$\nabla_F(x_0)=\lambda\nabla_G(x_0).$$

מסעיף א', ומחישוב הגרדיאנט של $G$ מקבלים כי משוואה זו היא

$$2Ax_0=2\lambda x_0$$

ובפרט $x_0$ הוא וקטור עצמי של $A$, בעל ערך עצמי ממשי $\lambda$.