אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר א' תשע"ח

חשבון וקטורי להנדסת חשמל (201-1-9631)

דף תרגילים מס' 7

אינטגרל מסילתי

1. לחשב אינטגרל מסילתי מסוג ראשון:

(א) $\int_L (x^2+y)ds$ כאשר $L: \quad t\in[0,1]\ ,\quad y=t-1\ ,\ x=t+1$

(ב) $\int_L (x+2y+3z)ds$ כאשר L חלק הישר $z=1\ ,\ y=t\ ,\ x=1+t$ שבין הנקודות $(2,1,1)$ ו־ $(0,-1,1)$

(ג) $\int_L (x^2+y)ds$ כאשר L הוא הריבוע: $|x|+|y|=1$

(ד) $\int_L \sqrt[4]{x^2-y^2}ds$ כאשר L ־ הוא העקום הנתון בקואורדינטות פולריות ע"י :
$\varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\ ,\ r=\sqrt{\cos(2\varphi)}$

רמז: הראו כי בהינתן עקומה בהצגה קוטבית $r(t),\ \varphi(t)$ מתקיים: $\frac{ds}{dt}=\sqrt{r'^2+r^2\varphi'^2}$

(ה) $\int_L (x+y+z)ds$ כאשר L הוא העקום $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+y+z=1\end{cases}$

בתרגילים הבאים נשתמש בסימון $\int_C F_1dx_1+F_2dx_2...+F_ndx_n$ לאינטגרל מסילתי $\int_C \vec{F}\cdot dC$ ־ אינטגרל מסילתי מסוג II של שדה וקטורי $\vec{F}=(F_1,F_2,...,F_n)$ לאורך העקומה C עם אוריינטציה נתונה.

2. לחשב אינטגרל מסילתי מסוג שני:

(א) $\int_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ כאשר C היא המסילה העוברת לאורך הפרבולה $y=x^2$ מנקודה $(1,1)$ לנקודה $(-1,1)$.

(ב) $\int_C (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$ לאורך המסילה C הנתונה על ידי $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$, $0\le t\le 1$.

(ג) $\int_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$ לאורך המסילה שמחברת את $(0,0)$ ו־ $(2,0)$ על ידי $y=1-|1-x|$.

(ד) $\int_\gamma ydx+zdy+xdz$ כאשר γ הוא $\begin{cases}x+y=2\\x^2+y^2+z^2=2(x+y)\end{cases}$, עם האוריאנטציה בכוון השעון במבט מכוון ציר x

(ה) $\int_\gamma ydx+zdy+xdz$ כאשר γ הוא חלק מחיתוך של משטחים $z=xy$ ו־ $x^2+y^2=1$, אשר מתחיל בנקודה $A=(1,0,0)$ ומסתיים נקודה $B=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$ כך ש־ z ־ פונקציה מונטונית גדלה לאורך γ.

3. תהי C ־ עקומה חלקה וקומפקטית עם אוריינטציה ב־ $\mathbb{R}^n$, D ־ סביבה של C ו־ $\vec{F}:D\to\mathbb{R}^n$ ־ שדה וקטורי. הראו כי מתקיים

$$\left|\int_C \vec{F}\cdot dC\right|\le\max_{x\in C}(\|\vec{F}(x)\|)\cdot L$$

כאשר L ־ אורך של C.

אינטגרל ב־ $\mathbb{R}^n$

4. להחליף סדר אינטגרציה באינטגרלים הבאים:
   (א) $\int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dydx$
   (ב) $\int_0^a\int_0^a f(x,y)dydx + \int_a^{2a}\int_0^{2a-x} f(x,y)dydx$ $\quad (a>0)$
   (ג) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^h f(x,y,z)dzdydx$ **בסדר** $(x;y;z)$ $\quad (a>0)$
   (ד) $\int_0^1\int_0^1\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dzdydx$ **בסדר** $(x;z;y)$

5. לחשב את האינטגרלים הבאים:
   (א) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}dy$
   (ב) $\iint_D \min\{x,y\}\ dxdy$ כאשר $D=\{0\le x\le a\ ,\ 0\le y\le a\}$, $a>0$
   (ג) $\iiint_T y\ dxdydz$ כאשר T ־ התחום החסום ע"י מישורים
   $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+y+z=4$
   (ד) $\iiint_T xy^2z^3\ dxdydz$ כאשר T ־ התחום החסום ע"י משטחים
   $z=xy$, $y=x$, $z=0$, $x=1$
   (ה) $\iiint_T y\ dxdydz$ כאשר $T=\{|x|\le z\ ,\ 0\le z\le 1\ ,\ z\le y\ ,\ x^2+y^2+z^2\le 4\}$

6. (א) לחשב את הנפח של פירמידה n־מימדית :

$$V=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\ |\ 0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le 1\}$$

   (ב) תהי f רציפה ב־ $[0,1]$. הראו כי

$$\int_V\left(\prod_{j=1}^{n} f(x_j)\right)dx_1\cdots dx_n=\frac{1}{n!}\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^n$$

   כאשר V ־ פירמידה מסעיף הקודם