אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר א' תשע"ח

חשבון וקטורי להנדסת חשמל (201-1-9631)

דף תרגילים מס' 7

אינטגרל מסילתי

1. לחשב אינטגרל מסילתי מסוג ראשון:

(א) $\int_L (x^2+y)ds$ כאשר $L: \quad t\in[0,1] \ , \quad y=t-1 \ , \ x=t+1$

פתרון:

$$\begin{matrix} x'=1 \\ y'=1 \end{matrix} \implies ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\sqrt{2}dt$$

$$\int_L (x^2+y)ds=\int_0^1 \left[(t+1)^2+(t-1)\right]\sqrt{2}dt=\frac{11}{3\sqrt{2}}$$

(ב) $\int_L (x+2y+3z)ds$ כאשר L חלק הישר $z=1 \ , \ y=t \ , \ x=1+t$ שבין הנקודות $(2,1,1)$ ו־ $(0,-1,1)$

פתרון: $y(t_0)=-1 \implies t_0=-1 \ , \quad y(t_1)=1 \implies t_1=1$

$$\begin{matrix} x'=1 \\ y'=1 \\ z'=0 \end{matrix} \implies ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\sqrt{2}dt$$

$$\int_L (x+2y+3z)ds=\int_{-1}^1 \left[(1+t)+2t+3\right]\sqrt{2}dt=8\sqrt{2}$$

(ג) $\int_L (x^2+y)ds$ כאשר L הוא הריבוע: $|x|+|y|=1$

פתרון: נשים לב כי L סימטרי ביחס ל־ $x\leftrightarrow -x$ (שיקוף ביחס לציר y) וגם ביחס ל־ $y\leftrightarrow -y$ (שיקוף ביחס לציר x) . מצד שני x^2 פונקציה זוגית ביחס לשתי סימטריות הנ"ל ואילו y אי־זוגית ביחס ל־ $y\leftrightarrow -y$ (ולכן האינטגרל עליה מתאפס). מקבלים:

$$\int_L (x^2+y)ds=4\int_{L_I} x^2ds$$

כאשר L_I ־חלק של L הנמצא ברביע הראשון : $x+y=1$

$$\begin{matrix} x=t \\ y=1-t \\ t\in[0,1] \end{matrix} \implies \begin{matrix} x'=1 \\ y'=-1 \end{matrix} \implies ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\sqrt{2}dt$$

$$\int_L (x^2+y)ds=4\int_{L_I} x^2ds=4\int_0^1 t^2\sqrt{2}dt=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(ד) $\int_L \sqrt[4]{x^2-y^2}ds$ כאשר L ־ הוא העקום הנתון בקואורדינטות פולריות ע"י :
$\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$
רמז: הראו כי בהינתן עקומה בהצגה קוטבית $r(t),\ \varphi(t)$ מתקיים: $\frac{ds}{dt} = \sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2}$

פתרון:

$$\begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{array} \implies \begin{array}{l} x' = r'\cos(\varphi) - r\varphi'\sin(\varphi) \\ y' = r\sin(\varphi) + r\varphi'\cos(\varphi) \end{array} \implies \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2}$$

נשתמש בזהות טריגונומטרית $\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)$, ונקבל

$$\int_L \sqrt[4]{x^2-y^2}ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[4]{r^2\Big(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\Big)}\sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2}dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos(2\varphi)}\frac{1}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}dt = \frac{\pi}{2}$$

(ה) $\int_L (x-y)ds$ כאשר L הוא העקום $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

פתרון:

$$\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1-x-y = 1-\cos t - \sin t \end{array} \implies \begin{array}{l} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \\ z' = \sin t - \cos t \end{array} \implies \frac{ds}{dt} = \sqrt{2-\sin(2t)}$$

$$\int_L (x^2-y^2)ds = \int_0^{2\pi} \cos(2t)\sqrt{2-\sin(2t)}dt = \begin{bmatrix} u = \sin(2t) \\ du = 2\cos(2t)dt \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u^2}}du =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{1+u}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\Big((1+2\pi)^{\frac{3}{2}} - 1\Big)$$

בתרגילים הבאים נשתמש בסימון $\int_C F_1dx_1 + F_2dx_2 ... + F_ndx_n$ לאינטגרל מסילתי $\int_C \vec{F}\cdot dC$ ־ אינטגרל מסילתי מסוג II של שדה וקטורי $\vec{F} = (F_1, F_2, ..., F_n)$ לאורך העקומה C עם אוריינטציה נתונה.

2. לחשב אינטגרל מסילתי מסוג שני:

(א) $\int_C (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy$ כאשר C היא המסילה העוברת לאורך הפרבולה $y = x^2$ מנקודה $(1,1)$ לנקודה $(-1,1)$.

פתרון: $y = x^2 \implies dy = 2xdx$

$$\int_C (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy = \int_C x^2dx - \int_C ydy + \int_C y^2dy - \int_C 4x^4dx = \int_C (x^2-4x^4)dx - \int_C (y+y^2)dy$$

נשים לב כי
$$(x^2-4x^4, 0) = \nabla F(x)\ ,\quad (0, y+y^2) = \nabla G(y)$$
כאשר $F(x)$ ־ פונקציה קדומה של x^2-4x^4 , ו־ $G(y)$ ־ פונקציה קדומה של

$y+y^2$. לכן לפי משפט היסודי של חדו"א

$$\int_C (x^2-4x^4)dx = F(-1)-F(1) = \frac{x^3}{3}-\frac{4x^5}{5}\Big|_1^{-1} = \frac{14}{15}\ , \qquad \int_C (y+y^2)dy = G(1)-G(1) = 0$$

כלומר $\int_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy = \frac{14}{15}$

ב) $\int_C (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$ לאורך המסילה C הנתונה על ידי $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$, $0\le t\le 1$.

פתרון: $\int_C (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz = \int_0^1 \left((t^4-t^6)+4t^4-3t^4\right)dt = \frac{1}{35}$

ג) $\int_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$ לאורך המסילה שמחברת את $(0,0)$ ו־ $(2,0)$ על ידי $y=1-|1-x|$.

פתרון: $C=C_1\cup C_2$, כאשר C_1 מחברת את $(0,0)$ ל־ $(1,1)$ ונתונה ע"י: $y=x$ $(dx=dy)$, ו־ C_2 מחברת את $(1,1)$ ל־ $(2,0)$ ונתונה ע"י: $y=2-x$ $(dx=-dy)$.
לכן

$$\int_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy = \int_{C_1}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dx+\int_{C_2}-(x^2+y^2)dy+(x^2-y^2)dy =$$

$$= 2\Big(\int_C x^2dx - \int_C y^2dy\Big) = 2\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{y^3}{3}\Big|_1^0\right) = \frac{4}{3}$$

ד) $\int_\gamma ydx+zdy+xdz$ כאשר γ הוא $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2+z^2=2(x+y)\end{cases}$, עם האוריאנטציה בכוון השעון במבט מכוון ציר x

פתרון:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2(x+y) \\ x+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2-x)^2+z^2=4 \\ y=2-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+\frac{z^2}{2}=1 \\ y=2-x\end{cases}$$

משוואה עליונה מגדירה אליפסה ולכן ניתן לבחור פרמטריזציה של γ :

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3 \quad , \quad \gamma(t) = \left(1+\cos t,\ 1-\cos t,\ \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\gamma(t)' = \left(-\sin t,\ \sin t,\ \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)$$

(שימו לב שפרמטריזציה תואמת את האוריינטציה הנתונה!) ולכן

$$\int_\gamma ydx+zdy+xdz = \int_0^{2\pi}\left(-(1-\cos t)\sin t + \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}} + (1+\cos t)\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)dt = \sqrt{2}\pi$$

(ה) $\int_\gamma ydx+zdy+xdz$ כאשר γ הוא חלק מחיתוך של משטחים $z=xy$ ו־ $x^2+y^2=1$, אשר מתחיל בנקודה $A=(1,0,0)$ ומסתיים נקודה $B=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$ כך ש־ z ־ פונקציה מונטונית גדלה לאורך γ.

פתרון: משוואה שנייה מגדירה מעגל ולכן ניתן לבחור פרמטריזציה של γ :

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3 \quad , \quad \gamma(t)=\Big(\cos t,\ \sin t,\ \frac{1}{2}\sin(2t)\Big)$$
$$\gamma(t)'=\big(-\sin t,\ \cos t,\ \cos(2t)\big)$$

(שימו לב שפרמטריזציה תואמת את האוריינטציה הנתונה!) ולכן

$$\int_\gamma ydx+zdy+xdz=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(-\sin^2 t+\sin t\cos^2 t+2\cos 2t\cos(2t)\Big)dt=\frac{7}{12}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3. תהי C ־ עקומה חלקה וקומפקטית עם אוריינטציה ב־ $\mathbb{R}^n$, D ־ סביבה של C ו־ $\vec{F}:D\to\mathbb{R}^n$ ־ שדה וקטורי. הראו כי מתקיים

$$\Big|\int_C \vec{F}\cdot dC\Big|\le\max_{x\in C}(\|\vec{F}(x)\|)\cdot L$$

כאשר L ־ אורך של C.

פתרון: תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}$ ־ פרמטריזציה של C. מתקיים:

$$\int_C\vec{F}\cdot dC=\int_a^b\Big\langle\vec{F}(\gamma(t)),\frac{d\gamma}{dt}(t)\Big\rangle dt \quad\Longrightarrow\quad \Big|\int_C\vec{F}\cdot dC\Big|\le\int_a^b\Big|\Big\langle\vec{F}(\gamma(t)),\frac{d\gamma}{dt}(t)\Big\rangle\Big|dt$$

לפי אי־שויון קושי־שוורץ: $\Big|\Big\langle\vec{F}(\gamma(t)),\frac{d\gamma}{dt}(t)\Big\rangle\Big|\le\|\vec{F}\|\cdot\Big\|\frac{d\gamma}{dt}\Big\|$, ולכן

$$\Big|\int_C\vec{F}\cdot dC\Big|\le\int_a^b\|\vec{F}(\gamma(t))\|\cdot\Big\|\frac{d\gamma}{dt}(t)\Big\|dt$$

מכוון ש־ C ־ קומפקטית, פונקציה רציפה $\|\vec{F}\|$ (כהרכבה של שתי רציפות) מקבלת מקסימום על C ולכן

$$\int_a^b\|\vec{F}(\gamma(t))\|\cdot\Big\|\frac{d\gamma}{dt}(t)\Big\|dt\le\int_a^b\max_{x\in C}(\|\vec{F}(x)\|)\cdot\Big\|\frac{d\gamma}{dt}(t)\Big\|dt=\max_{x\in C}(\|\vec{F}(x)\|)\int_a^b\Big\|\frac{d\gamma}{dt}(t)\Big\|dt$$

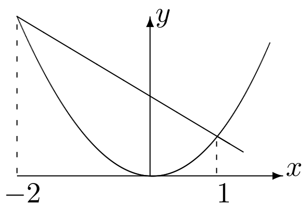
אבל

$$\int_a^b\Big\|\frac{d\gamma}{dt}(t)\Big\|dt=\int_C ds=L$$

ומכאן מקבלים את האי־שויון הרצוי.

אינטגרל ב־ $\mathbb{R}^n$

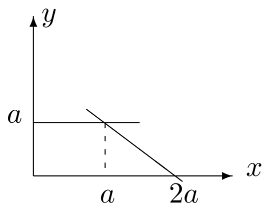
4. להחליף סדר אינטגרציה באינטגרלים הבאים:



א) $\int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dydx$

פתרון:

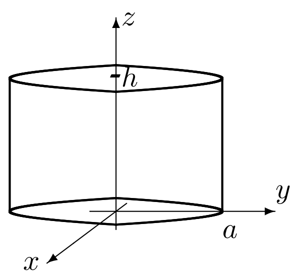
$$\int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} fdydx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} fdxdy + \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} fdxdy$$



ב) $\int_0^a\int_0^a f(x,y)dydx + \int_a^{2a}\int_0^{2a-x} f(x,y)dydx$ $\qquad (a>0)$

פתרון:

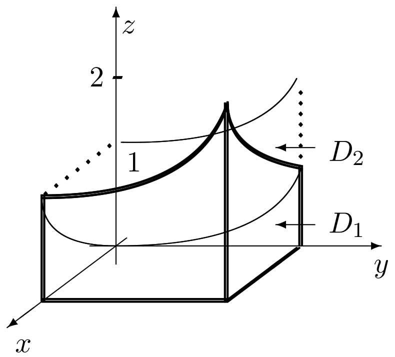
$$\int_0^a \int_0^a fdydx + \int_a^{2a} \int_0^{2a-x} fdydx = \int_0^a \int_0^{2a-y} fdxdy$$



ג) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^h f(x,y,z)dzdydx$ בסדר $(x;y;z)$ $\qquad (a>0)$

פתרון:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^h fdzdydx = \int_0^h \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} fdxdydz$$



ד) $\int_0^1\int_0^1\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dzdydx$ בסדר $(x;z;y)$

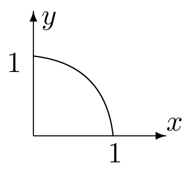
פתרון:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} fdzdydx = \int_{D_1} dydz \int_0^1 fdx + \int_{D_2} dydz \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 fdx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^1 fdxdzdy + \int_0^1 \int_{y^2}^{1+y^2} \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 fdxdzdy$$

5. לחשב את האינטגרלים הבאים:

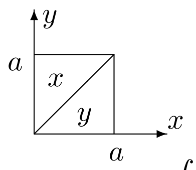
(א) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy$



פתרון:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \big(1-y^2\big)^{\frac{3}{2}} = \int_0^1 dy\ \big(1-y^2\big)^{\frac{3}{2}} x \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}}$$
$$= \int_0^1 dy \big(1-y^2\big)^2 = \int_0^1 (1-2y^2+y^4) dy = \frac{8}{15}$$

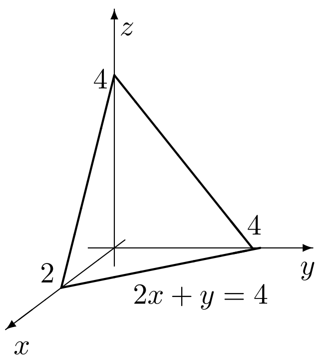
(ב) $\iint_D \min\{x,y\}\ dxdy$ כאשר $D = \{0 \le x \le a\ ,\ 0 \le y \le a\}$, $a > 0$



פתרון:

$$\iint_D \min\{x,y\}\ dxdy = \int_0^a dx \int_0^x y dy + \int_0^a dy \int_0^y x dx = 2\int_0^a dx\ \frac{y^2}{2}\Big|_0^x = \int_0^a x^2 dx = \frac{a}{3}$$

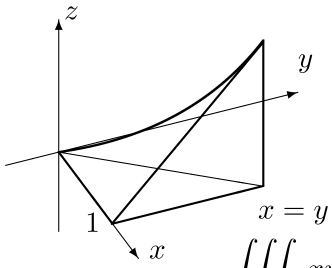
(ג) $\iiint_T y\ dxdydz$ כאשר T ־ התחום החסום ע"י מישורים
$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 4$



פתרון:

$$\iiint_T y\ dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{4-2x-y} y dz = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} y dy \int_0^{4-2x-y} dz =$$
$$= \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy\ y(4-2x-y) = \int_0^2 dx \left(y^2(2-x) - \frac{y^3}{3} \right)\Big|_0^{4-2x} =$$
$$= \frac{4}{3} \int_0^2 (2-x)^3 dx = -\frac{1}{3}\ (2-x)^4 \big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

(ד) $\iiint_T xy^2z^3\ dxdydz$ כאשר T - התחום החסום ע"י משטחים
$z=xy$, $y=x$, $z=0$, $x=1$

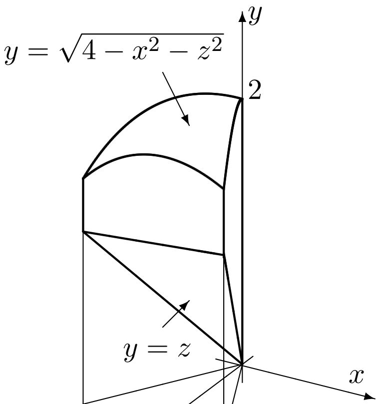


פתרון:

$$\iiint_T xy^2z^3\ dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy}dz\ xy^2z^3=\int_0^1 dx\int_0^x dy\ \frac{z^4}{4}\Big|_0^{xy}=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 dx\int_0^x x^5y^6dy=\frac{1}{28}\int_0^1 dx\ x^5y^y\big|_0^x=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{364}$$

(ה) $\iiint_T y\ dxdydz$ כאשר $T=\{|x|\le z\ ,\ 0\le z\le 1\ ,\ z\le y\ ,\ x^2+y^2+z^2\le 4\}$



פתרון:

נשים לב כי מדובר על גוף גלילי הכלוא בין גרפים

$y=z\ ,\ y=\sqrt{4-x^2-z^2}$

מעל התחום $D=\{|x|\le z\le 1\}$ (משולש) במישור zx
לכן

$$\iiint_T ydxdydz=\iint_D dxdz\int_z^{\sqrt{4-x^2-y^2}}ydy=\frac{1}{2}\iint_D dxdz\ y^2\Big|_z^{\sqrt{4-x^2-y^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dz\int_{-z}^{z}dx\cdot(4-x^2-2z^2)=\int_0^1 dz\cdot\left(4z-\frac{7}{3}z^3\right)=\frac{17}{12}$$

6. (א) לחשב את הנפח של פירמידה n-מימדית :

$$V=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\ |\ 0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le 1\}$$

פתרון:

$$Vol(V)=\int_V 1\cdot dx_1dx_2...dx_n=\int_0^1 dx_n\int_0^{x_n}dx_{n-1}\ldots\int_0^{x_3}dx_2\int_0^{x_2}dx_1=$$

$$=\int_0^1 dx_n\int_0^{x_n}dx_{n-1}\ldots\int_0^{x_3}x_2dx_2=\int_0^1 dx_n\int_0^{x_n}dx_{n-1}\ldots\int_0^{x_4}\frac{x_3^2}{2}dx_3=\ldots$$

$$=\int_0^1\frac{x_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!}dx_{n-1}=\frac{1}{n!}$$

(ב) תהי f רציפה ב־ $[0,1]$. הראו כי

$$\int_V \left(\prod_{j=1}^n f(x_j)\right) dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{n!}\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^n$$

כאשר V ־ פירמידה מסעיף הקודם

פתרון:

נסמן $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ ־ הפונקציה הקדומה של $f(x)$ המקיימת: $F(0)=0$.

$$\int_V \left(\prod_{j=1}^n f(x_j)\right) dx_1\cdots dx_n = \int_0^1 dx_n f(x_n)\int_0^{x_{n-1}} dx_{n-1} f(x_{n-1})\ldots\int_0^{x_4} dx_3 f(x_3)\int_0^{x_3} dx_2 f(x_2)\int_0^{x_2} dx_1 f(x_1) =$$

$$= \int_0^1 dx_n f(x_n)\int_0^{x_{n-1}} dx_{n-1} f(x_{n-1})\ldots\int_0^{x_4} dx_3 f(x_3)\int_0^{x_3} dx_2 f(x_2) F(x_1)\Big|_0^{x_2} =$$

$$= \int_0^1 f(x_n)dx_n\int_0^{x_{n-1}} dx_{n-1} f(x_{n-1})\ldots\int_0^{x_4} dx_3 f(x_3)\int_0^{x_3} dx_2 F'(x_2)F(x_2) =$$

$$= \int_0^1 dx_n f(x_n)\int_0^{x_{n-1}} dx_{n-1} f(x_{n-1})\ldots\int_0^{x_4} dx_3 f(x_3)\frac{F^2(x_2)}{2}\Big|_0^{x_3} =$$

$$= \int_0^1 dx_n f(x_n)\int_0^{x_{n-1}} dx_{n-1} f(x_{n-1})\ldots\int_0^{x_4} dx_3 F'(x_3)\frac{F^2(x_3)}{2} =$$

$$= \int_0^1 f(x_n)\frac{F^{n-1}(x_n)}{(n-1)!}dx_n = \frac{F^n(x_n)}{n!}\Big|_0^1 = \frac{1}{n!}\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^n$$