

## דף תרגילים מס' 8

הערה: משמעות המושג "בכיוון החיובי" היא נגד כיוון השעון.

1. חשבו את  $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$  כאשר

א.  $\gamma$  היא מעגל  $x^2 + y^2 = 1$  בכיוון החיובי;

ב.  $\gamma$  היא אליפסה  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  בכיוון השלילי.

ג.  $\gamma$  נתונה בקואורדינטות קוטביות ע"י  $r(\theta) = \frac{1}{1 - \sin \theta}$  מנקודה  $(-\sqrt{3}, 1)$  לנקודה  $(\sqrt{3}, 1)$ .

2. חשבו

א.  $\oint_{\gamma} \left[ (2y + \sqrt{1+x^6}) dx + (5x - e^{y^2}) dy \right]$  כאשר  $\gamma$  היא מעגל  $x^2 + y^2 = 4$  בכיוון החיובי;

ב.  $\oint_{\gamma} \left[ (y^2 - \sin e^x + xy) dx - \left( x^2 + \frac{1}{\cosh^4 y} - 2xy \right) dy \right]$  כאשר  $\gamma$  היא ריבוע שקודקודיו הם  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$  בכיוון החיובי.

ג.  $\int_{\gamma} e^x \left[ (1 - \cos y) dx + (2y + \sin y) dy \right]$  כאשר  $\gamma$  נתונה ע"י  $y = \sin x$  ל-  $0 \leq x \leq \pi$ .

3. בהסתמך על משפט גרין חשבו את השטח של:

א. ציקלואידה הנתונה ע"י  $r(t) = (at - a \sin t, a - a \cos t)$  ל-  $0 \leq t \leq 2\pi$  ו-  $a > 0$ ;

ב. אסטרואידה הנתונה ע"י  $r(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$  ל-  $0 \leq t \leq 2\pi$  ו-  $a > 0$ ;

ג. למניסקטה הנתונה ע"י  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ,  $a > 0$  (הדרכה: הציבו  $y = x \tan t$ ), (ראו את האיור הראשון);

ד. לולאה של עלה של קרטזיוס הנתון ע"י  $x^3 + y^3 = 3axy$ ,  $a > 0$  (הדרכה: הציבו  $y = tx$ ), (ראו את האיור השני).

4. קבעו אם השדות הבאים הינם שדות משמרים בתחום  $U$ , במקרה של התשובה החיובית מצאו את פונקציית הפוטנציאל ב-  $U$ :

## דף תרגילים מס' 8

---

**א.**  $U = \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = \left( x \sin y + 1, \frac{x^2 \cos y}{2} \right)$

**ב.**  $U = \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y, z) = (z \cos xz + y, x, x \cos xz)$

**5.** חשבו את האינטגרלים הבאים ע"י מציאת פונקציית הפוטנציאל:

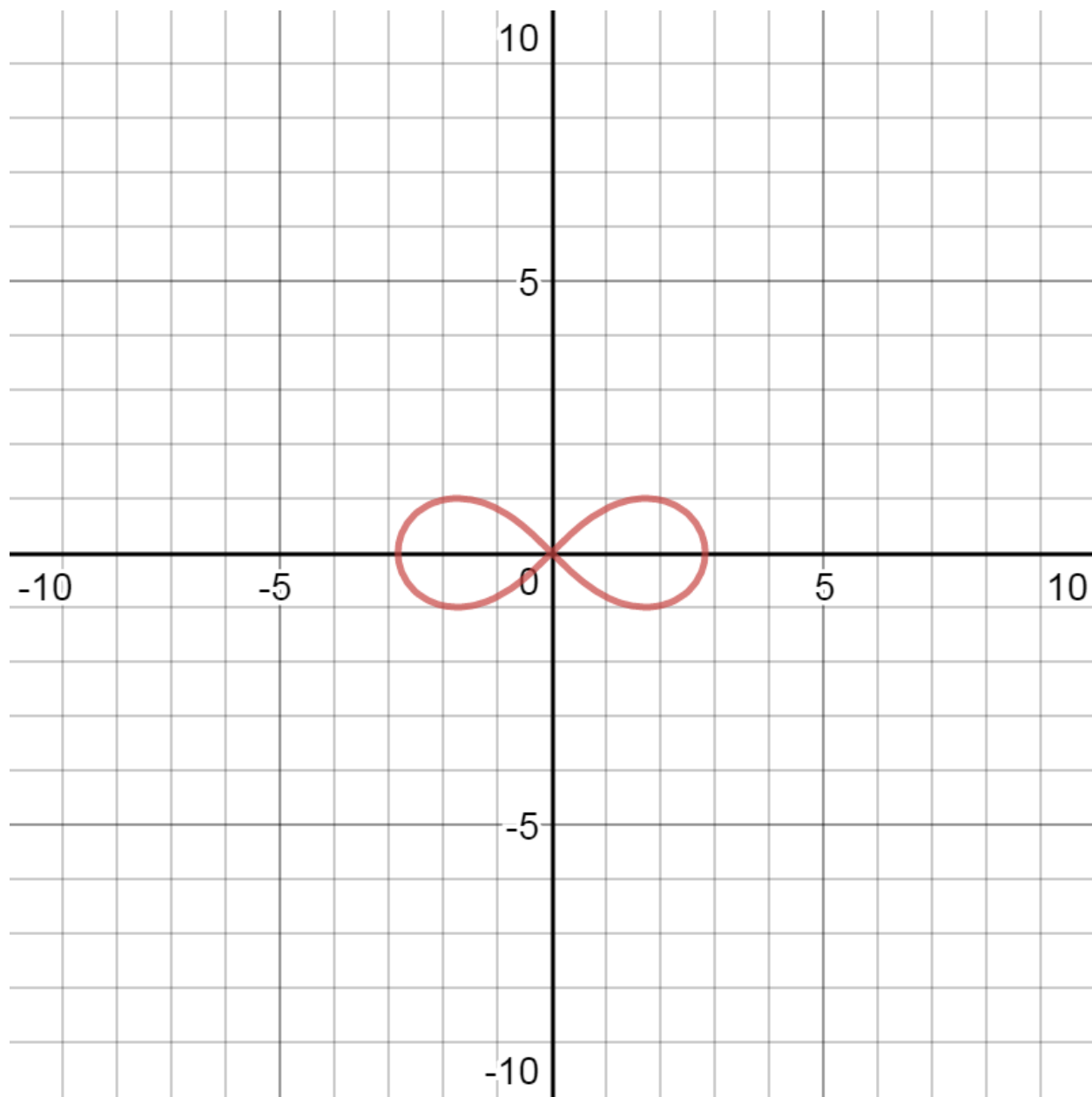
**א.**  $\int_{\gamma} \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \left( \frac{e^2}{1+x^2} + 1 \right) dy$  כאשר  $\gamma$  נתונה ע"י  $x^2 + y^4 = 16$  מ- $(0, -2)$  ל- $(0, 2)$ .

**ב.**  $\int_{\gamma} e^{x-y} [(1+x+y)dx + (1-x-y)] dy$  כאשר  $\gamma$  נתונה ע"י  $\cos x^4 + \sin y^4 = 1$  מ- $(0, 0)$  ל- $(0, \sqrt[4]{\pi/2})$ .

**6.** מהם התנאים על שדה סקלרי  $C^1(\mathbb{R}^2)$   $F(x, y)$  לאי-תלות של  $\int_{\gamma} Fydx + Fxdy$  בנקודת ההתחלה

והסיום של המסלול בלבד?

דף תרגילים מס' 8



דף תרגילים מס' 8

