דף תרגילים 9 - חשבון וקטורי להנדסת חשמל

1. נתון משטח בצורה פרמטרית. כתבו משוואת המשטח בקואורדינטות קרטזיות וקבע איזו צורה גיאומטרית מייצגת המשוואה.

א) $r(u,v)=(u\cos v, u^2, u\sin v)$ ב) $r(u,v)=(v\cos u, \sqrt{25-v^2}, v\sin u)$

ג) $r(u,v)=(v, u^2+v^2, u)$ ד) $r(z,\theta)=(2\sqrt{z}\cos\theta, 3\sqrt{z}\sin\theta, z)$

ה) $r(\phi_1,\phi_2)=((R_2+R_1\sin(\phi_1))\cos(\phi_2),(R_2+R_1\sin(\phi_1))\sin(\phi_2),R_1\cos(\phi_1))$

כאשר $\phi_1,\phi_2\in[0,2\pi]$ וגם $R_2>R_1$. המשטח הזה נקרא טורוס.

2. מצאו את משוואת מישור המשיק למשטח $r(u,v)=(\sin(u+v), e^{u-v}, (uv)^{3/2})$ בנקודה $u=v=\frac{\pi}{4}$.

3. א) נניח שהמשטח הינו גרף של פונקציה $S=\{z=z(x,y),(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2\}$. תהי f פונקציה רציפה על S. הוכיחו: $\iint_S f\,dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$.

ב) נניח שהמשטח נתון בקואורדינטות גליליות $S=\{(r\cos(\phi), r\sin(\phi), z(r,\phi)),(r,\phi)\in D\}$.
תהי f פונקציה רציפה על S. הוכיחו:

$$\iint_S f\,dS=\iint_D f(x(r,\phi),y(r,\phi),z(r,\phi))\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}\,dr\,d\phi$$

ג)נניח שהמשטח נתון בקואורדינטות כדוריות $S=\{r=r(\phi,\theta),(\phi,\theta)\in D\}$. קבלו נוסחה דומה.

ד)נניח שהמשטח הוא חלק של טורוס משאלה 1ה $S=\{r=r(\phi_1,\phi_2),(\phi_1,\phi_2)\in D\}$. קבלו את הנוסחה $\iint_S f\,dS=\iint_D f(x(\phi_1,\phi_2),y(\phi_1,\phi_2),z(\phi_1,\phi_2))(R_2+R_1\sin(\phi_1))R_1\,d\phi_1\,d\phi_2$

ה) חשבו את שטח של המשטחים הבאים:

i. $\{x^2+y^2+z^2=a^2, \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\le 1, 0<b\le a\}$ ii. טורוס משאלה 1ה

ו) חשבו $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$ כשאר S היא מעטפת של הגוף $\sqrt{(x^2+y^2)}\le z\le 1$.

ז)חשבו את המסה של כליפה $\{x^2+y^2+z^2=1, -\frac{1}{2}\le z\le\frac{\sqrt{3}}{2}, x\le y\}$ בעלת צפיפות משטחית בכל נקודה השווה למרחק מהנקודה למישור xy.

4. חשבו שטח פנים של הצורות הבאות:

א) חלק של המשטח $0\le z=2-x^2-y^2$.

ב) חלק של המשטח $z=\sqrt{x^2+y^2}$ החסום ע"י הגליל $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$,

ג) מעטפת של הגוף החסום ע"י $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$.

5. א) נתון שדה וקטורי $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. נניח שהמשטח הינו גרף של פונקציה $S=\{z=z(x,y),(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2\}$, והנורמל פונה כלפי מעלה, $N_z>0$. הוכיחו כי

$$\iint_S \vec{F}\,d\vec{S}=\iint_D \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} dx\,dy$$

ב)נניח שהמשטח הוא חלק של ספירה $S=\{r=R=const,(\phi,\theta)\in D\}$ והנורמל פונה כלפי חוץ.
נניח שהשדה הינו מהצורה $F=f\cdot\vec{r}$ כאשר $\vec{r}=(x,y,z)$.
הוכיחו כי $\iint_S \vec{F}\,\vec{dS}=\iint_D f\,R^3\sin(\theta)\,d\phi\,d\theta$.

ג)ננח שהמשטח הוא חלק של גליל $S=\{r=const,(\phi,z)\in D\}$ והנורמל פונה כלפי חוץ.
הוכיחו כי $\iint_S \vec{F}\,\vec{dS}=\iint_D (F_x\cdot x+F_y\cdot y)\,d\phi\,dz$.

6. חשבו את השטף של שדה וקטורי $\vec{F}$ דרך המשטח S:
א) $\vec{F}=(4x,-2y^2,z^2)$ ו- S החלק החיצוני של הגליל $x^2+y^2=4$ הסגור בין $0\le z\le 3$.
ב) $\vec{F}=(3x,4y,-z)$ ו- S שפה של התחום הסגור $x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$ הצד החיצוני.
ג) $\vec{F}=(-2x+y^2+z-1,3x^2+y-z,z)$ ו- S צד חיצוני של הכדור $x^2+y^2+z^2=4R^2$
החסום בין המישורים $-\sqrt{2}R\le z\le\sqrt{2}R$.

7. יהיה $C^2\ni F,G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ו- $C^2\ni f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, הוכיחו:
א) $\operatorname{div}(F\pm G)=\operatorname{div}(F)\pm\operatorname{div}(G)$ ב) $\operatorname{rot}(F\pm G)=\operatorname{rot}(F)\pm\operatorname{rot}(G)$ ג) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F))=0$
ד) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f))=0$ ה) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))=\Delta f=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f$ ו) $\operatorname{grad}(f^2)=2f\operatorname{grad}(f)$

8. חשבו $\oiint_S (x-y+z)\,dydz+(y-z+x)\,dzdx+(z-x+y)\,dydx$
S- חלק חיצוני של המשטח הסגור הנתון ע"י $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$.

9. חשבו את האינטגרל המסילתי $\oint_L \vec{F}\,\vec{dr}$:
א) $\vec{F}=(3x+2y,z-y^2,x+1)$ כאשר L קו חתיוך: $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0$
בכיוון חיובי כאשר מסתכלים מנקודה $(10,10,10)$.
ב) $\vec{F}=(x-y,x-z,y-x)$ כאשר L קו חתיוך: $x^2+y^2=1,\ x+z=1$
בכיוון חיובי אם מסתכלים מנקודה $(\infty,0,0)$.
ג) $\vec{F}=(yz,3xz,2xy)$ כאשר L נתונה בצורה פרמטרית:
$x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t^2$, $0\le t\le 2\pi$ מהנקודה $O(0,0,0,)$ עד הנקודה
$A(2\pi,0,4\pi^2)$.

10. נסמן $\vec{r}=(x,y,z)$ כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
נגדיר שדה וקטורי $\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^3}$ בתחום $V=\{(x,y,z,):1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$
א) הוכיחו כי $\vec{F}$ שדה משמר בתחום V.
ב) הוכיחו כי $\nabla\vec{F}=0$.
ג) חשבו $\oint_L \vec{F}\,\vec{dr}$ כאשר L קו חיתוך בין הכדור $x^2+y^2+z^2=3$ ו- $z=x+y$.
ד) חשבו את השטף של שדה וקטורי $\vec{F}$ דרך צד חיצוני של המשטח הסגור S ,
כאשר S – מעטפת הגוף שאינו מכיל את הנקודה $(0,0,0)$.
ה) חשבו את השטף של שדה וקטורי $\vec{F}$ כאשר S חלק עליון של אליפסויד
$x^2+10y^2+100z^2=1000$ עם כיוון הנורמל כלפי מעלה.

11. נתונה מסילה סגורה $r:[0,1]\to\mathbb{R}^3$ כך ש- $r(0)=r(1)$.
ניח שהמסילה r מקיפה את התחום המישורי S שנמצא במישור
$\cos\alpha\, x+\cos\beta\, y+\cos\gamma\, z=p$, נסמן $vol_2(S)=B$.
$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ -קוסינוסי כיוון של הנומל למשטח S כאשר $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$.

חשבו $\oint_r \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$. בחרו כיוון של r .

12. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א) חשבו את שטף השדה $\vec{F}=\ln(y^2+z^2+1)\vec{i}+\frac{e^x}{z^2+1}\vec{j}+(x-y-1)\vec{k}$ דרך המשטח $S=\{0\le z=\sqrt{x^2+y^2}\le 1\}$ עם הנורמל חיצוני, $N_z\le 0$.

ב) יהיה $\vec{F}=(0,x+1,0)$. חשבו את שטף של השדה $rot(\vec{F})$, דרך המשטח $S=\{x^2+y^2+z^2=4,z\ge-\sqrt{2}\}$ עם הנורמל החיצוני.

ג) חשבו $\oiint_{x^2+y^2+z^2=4}\frac{5xydxdy+4yzdydz-9xzdzdx}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ עם הנורמל חיצוני. (רמז המכנה קבוע על המשטח).

13. א) יהי $\gamma=\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=2Rx \\ x^2+y^2=2rx\ ,z>0\end{matrix}\right\}$, כאשר $0<r<R$. הכיוון על המסילה חיובי אם מסתכלים מנקודה $(0,0,\infty)$. חשבו את צירקולצית השדה $\vec{F}=(y^2+z^2,z^2+x^2,x^2+y^2)$ לאורך γ .

ב) עבור העקומה $\gamma=\left\{\begin{matrix} x^{10}+y^{100}+z^{1000}=2000 \\ x-y+z=0\end{matrix}\right\}$ חשבו את האינטגרל $\oint_\gamma\frac{ydz-zdy}{y^2+z^2}$. (בחרו כיוון),

14. $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ - התחום החסום ע"י משטח חלק וסגור $\partial\Omega$.

א) הראו כי אם $C^2\supseteq f:\Omega\to\mathbb{R}$ -הרמונית (כלומר $\Delta f=0$), אזי מתקיים: $\oiint_{\partial\Omega}D_n f\, ds=0$ כאשר $D_n f$ -נגזרת כיוונית של f בכיוון הנורמל החיצוני ל- $\partial\Omega$ בנקודה $x\in\partial\Omega$.

ב) הראו כי אם $C^2\supseteq f:\Omega\to\mathbb{R}$ -הרמונית ו- $f(x)=0$ לכל $x\in\partial\Omega$ אזי $f=0$ בתוך התחום Ω . רמז: השתמשו במשפט גאוס עבור שדה $f\nabla f$.

15. הוכיחו את הטענה או הפריכו באמצאות דוגמה נגדית.

א) יהי $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ -שדה וקטורי חלק. נניח ש- $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}=0$,
אזי $\oiint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\, ds=0$ לכל ספירה $S\subseteq\mathbb{R}^3$.

ב) תהי $S\subseteq\mathbb{R}^3$ ספירת היחידה שמרכזה בראשית, אזי $\oiint_S(x+y+z)\cdot ds=0$

ג) תהי $U\subseteq\mathbb{R}^3$ -פתוחה ו- $C^2\ni f:U\to\mathbb{R}$. נגדיר $C^1\ni\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שדה וקטורי חלק בצורה $\vec{F}=\nabla f$, אזי $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0$