תאריך הבחינה:	24 בינואר 2019
שם המרצים:	ישי דן-כהן איליה טיומקין דמיטרי קרנר
שם הקורס:	חדו"א וקטורי להנדסת חשמל
מספר הקורס:	201.1.9631
שנה:	תשע"ט
סמסטר:	א'
מועד:	א'
משך הבחינה:	3 שעות
חומר עזר:	אין

בחינה בחדו"א וקטורי להנדסת חשמל

- משך הבחינה: 3 שעות.
- הנקוד המרבי בבחינה הוא 105 נקודות. מי שיצבור 100 נקודות או יותר ציונו יהיה 100.
- <u>אין להשתמש בכל חומר עזר שהוא לרבות מחשבונים</u>.
- בבחינה חמש שאלות פתוחות וחמש שאלות אמריקאיות. משקל כל שאלה פתוחה מסומן ליד השאלה. משקל כל שאלה אמריקאית – 4 נקודות.
- <u>את הפתרונות לשאלות הפתוחות יש לכתוב בכתב יד קריא ובמקומות המיועדים לכך בטופס הבחינה. הפתרונות צריכים להיות חדים, קצרים ומנומקים היטב. את ההגדרות יש לכתוב בניסוחים מלאים בדומה לניסוחיהן בהרצאות ו\או בספר הקורס.</u>
- <u>דפי הטיוטה יגרסו ולא יבדקו!</u>
- את התשובות לשאלות האמריקאיות יש לסמן בצורה ברורה בטופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. תשובות מרובות תפסלנה! אין צורך לנמק את התשובות לשאלות האמריקאיות.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציות ממחלקה C^2, ויהי S המשטח הנתון ע"י $3x^2+4y^2+5z^2=6$ בעל נורמל חיצוני n.

א. (5 נקודות) הגדירו את המושג: *פונקציה* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *ממחלקה* C^2.

ב. (5 נקודות) הוכיחו כי $div(fG)=fdiv(G)+F\cdot G$ כאשר $F=\nabla f, G=\nabla g$.

ג. (10 נקודות) הראו כי אם $div(F)=div(G)=0$ אז השטף של השדה $fG-gF$ דרך המשטח S הוא אפס, כלומר $\int_S (fG-gF)\cdot n d\sigma=0$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $D \subset \mathbb{R}^m$ קבוצה.

א. (5 נקודות) הגדירו את המושג הבא: *נקודה פנימית של* D;

ב. (5 נקודות) הגדירו את המושג הבא: *נקודת שפה של* D;

ג. (10 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם D סגורה ו- $vol_m(D) = 0$ אז $D = \partial D$.

שאלה 3 (15 נקודות)

חישבו את האינטגרל $\oint_C x^2 z ds$ כאשר C הוא המעגל הנתון ע"י $2x^2+2y^2-z^2-1=0=z-x^2-y^2$.

שאלה 4 (15 נקודות)

מצאו את כל הנקודות הקריטיות של $f(x,y)=x^2+\sin\frac{\pi}{y}$ וקבעו את סוגן.

שאלה 5 (15 נקודות)

יהי $D \subset \mathbb{R}^3$ התחום הנתון ע"י $0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ותהי $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x+z)$ פונקציה מ- D ל- $\mathbb{R}$. הראו כי f מקבלת מקסימום ב- D ומצאו את הערך המקסימלי.

שאלות אמריקאיות

לכל שאלה יש תשובה נכונה אחת בלבד. יש לסמן בבירור את התשובה שבחרתם. תשובות מרובות תפסלנה!

1) תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ויהי $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | f(x,y)=1\}$. נתון: $\nabla f(x,y)\neq 0$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. אז הישר המשיק לעקום C בנקודה $P=(x_0,y_0)\in C$ נתון ע"י

א) $\nabla f(P)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$;

ב) $\nabla f(P)\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}=0$;

ג) $\nabla f(P)\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}=1$;

ד) $\nabla f(P)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1$;

ה) התשובות א' עד ד' אינן נכונות.

2) איזו מבין הפונקציות הבאות רציפה בראשית?

א) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin^2(xy)}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

ב) $g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

ג) $h(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-2\sin(xy^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

ד) $i(x,y)=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x\neq 0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0\end{cases}$;

ה) $j(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

3) תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א) $\int_0^1\int_{x^2}^1 f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_{y^2}^1 f(x,y)dx\,dy$;

ב) $\int_0^1\int_{x^2}^1 f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_0^{y^2} f(x,y)dx\,dy$;

ג) $\int_0^1\int_{x^2}^1 f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx\,dy$;

ד) $\int_0^1\int_{x^2}^1 f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\,dy$;

ה) התשובות א' עד ד' אינן נכונות.

4) אם $D_1\subset\mathbb{R}^n$ סגורה ו- $D_2\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית אז

א) $D_1\cup D_2\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית;

ב) $D_1\cap D_2\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית;

ג) $D_1+D_2\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית (תזכורת: $D_1+D_2=\{X+Y \mid X\in D_1, Y\in D_2\}$);

ד) $D_2\setminus D_1\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית (תזכורת: $D_2\setminus D_1=\left\{X \,\middle|\, X\in D_2 \text{ וגם } X\notin D_1\right\}$);

ה) התשובות א' עד ד' אינן נכונות.

5) תהי $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ פונקציה ממחלקה C^1.

א) אם F חח"ע אז $DF(X)\neq 0$ לכל $X\in\mathbb{R}^n$;

ב) אם F חח"ע אז יתכן שיש $X\in\mathbb{R}^n$ עבורו $DF(X)=0$ אבל $JF(X)\neq 0$ לכל $X\in\mathbb{R}^n$;

ג) אם $JF(X)\neq 0$ אז F חח"ע;

ד) אם $JF(X)\neq 0$ אז יתכן ש- F אינה חח"ע אבל יש סביבה של X בה F חח"ע;

ה) התשובות א' עד ד' אינן נכונות.

דף נוסחאות

קואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta\,, dxdy = rdrd\theta$$
$$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

קואורדינטות גליליות:

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta\,, z = z, dxdydz = rdrd\theta dz$$
$$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

קואורדינטות כדוריות:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta\,, y = \rho\sin\phi\sin\theta\,, z = \rho\cos\phi\,, dxdydz = \rho^2\sin\phi\, d\rho d\theta d\phi$$
$$\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$$