תאריך הבחינה:	14 בפברואר 2019
שם המרצים:	ישי דן-כהן
	איליה טיומקין
	דמיטרי קרנר
שם הקורס:	חדו"א וקטורי להנדסת חשמל
מספר הקורס:	201.1.9631
שנה:	תשע"ט
סמסטר:	א'
מועד:	ב'
משך הבחינה:	3 שעות
חומר עזר:	אין

בחינה בחדו"א וקטורי להנדסת חשמל

- משך הבחינה: 3 שעות.
- הנקוד המרבי בבחינה הוא 105 נקודות. מי שיצבור 100 נקודות או יותר ציונו יהיה 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר שהוא לרבות מחשבונים.
- בבחינה חמש שאלות פתוחות וחמש שאלות אמריקאיות. משקל כל שאלה פתוחה מסומן ליד השאלה. משקל כל שאלה אמריקאית – 4 נקודות.
- את הפתרונות לשאלות הפתוחות יש לכתוב בכתב יד קריא ובמקומות המיועדים לכך בטופס הבחינה. הפתרונות צריכים להיות חדים, קצרים ומנומקים היטב. את ההגדרות יש לכתוב בניסוחים מלאים בדומה לניסוחיהן בהרצאות ו\או בספר הקורס.
- דפי הטיוטה יגרסו ולא יבדקו!
- את התשובות לשאלות האמריקאיות יש לסמן בצורה ברורה בטופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. תשובות מרובות תפסלנה! אין צורך לנמק את התשובות לשאלות האמריקאיות.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ פונקציה גזירה ברציפות ו- $K = \{(x,y) | 2 < 2x^2 + 3y^2 \leq 3\} \subset \mathbb{R}^2$ קבוצה במישור.

א. (5 נקודות) הוכיחו כי $(0,1), (1,0) \in \partial K$; תארו את השפה ∂K במפורש (אין צורך לנמק).

ב. (5 נקודות) הגדירו את המושג: *היעקוביאן של* F;

ג. (10 נקודות) הראו כי אם התמונה של F היא הקבוצה K אז יש נקודה $P \in \mathbb{R}^2$ עבורה $JF(P) = 0$.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. (5 נק') הגדירו את המושג: *F הוא שדה וקטורי משמר בקבוצה פתוחה* $D \subseteq \mathbb{R}^n$;

ב. (5 נק') תנו דוגמה של שדה וקטורי גזיר ברציפות F שאינו משמר בתחום הגדרתו אך $curl(F) = 0$;

ג. (10 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: *אם F ו- G שדות משמרים ב- $\mathbb{R}^3$ אז גם $F \times G$ הוא שדה משמר.*

שאלה 3 (15 נקודות)

יהי $D \subset \mathbb{R}^2$ הריבוע בעל הקדקודים: $(0,0), (1,1), (1,-1), (2,0)$. חישבו את האינטגרל $\int_D (x^2+y)dxdy$.

שאלה 4 (15 נקודות)

יהיו $F = (e^y z - x, x^5 - z^7, \ln(1 + x^2 y^4) + z)$ שדה וקטורי, S המשטח הנתון ע"י $x^2 + y^2 = 2 + z^2$ ו- $|z| < 1$, ויהי N הנורמל החיצוני למשטח S. חישבו את השטף $\int_S F \cdot N d\sigma$ של השדה F דרך S ביחס ל- N.

שאלה 5 (15 נקודות)

הראו כי מבין כל התיבות הישרות בעלות שטח פנים 24 מ"ר יש תיבה בעלת נפח מרבי. מהי התיבה ומהו הנפח שלה?

שאלות אמריקאיות

לכל שאלה יש תשובה נכונה אחת בלבד. יש לסמן בבירור את התשובה שבחרתם. תשובות מרובות תפסלנה!

1) איזו מבין הקבוצות הבאות פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$?

א) $\cap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}(0)$ (תזכורת: $B_r(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r^2\}$);

ב) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = \pi\}$;

ג) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 \leq 1\}$;

ד) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + xy + y^2 > 1\}$;

ה) כל הקבוצות לעיל אינן פתוחות.

2) איזו מבין הפונקציות הבאות **<u>אינה</u>** דיפרנציאבילית בראשית?

א) $f(x,y) = y|x|$;

ב) $g(x,y) = \frac{1+x+xy^3}{1+y^2}$;

ג) $h(x,y) = \begin{cases} x, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$;

ד) $i(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^2, & y > 0 \\ y^2 - x^2, & y \leq 0 \end{cases}$;

ה) כל הפונקציות לעיל דיפרנציאביליות בראשית.

3) תהינה $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה ממחלקה C^2 ו- P נקודה קריטית של f. נסמן ב- $\mathcal{H}f(P)$ את מטריצת ההסיאן של f בנקודה P. איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א) אם $\mathcal{H}f(P) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ אז P היא נקודת מקסימום מקומי;

ב) אם $\mathcal{H}f(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ אז P היא נקודת אוכף;

ג) אם $\mathcal{H}f(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ אז P היא נקודת מינימום מקומי;

ד) אם $\mathcal{H}f(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אז יש סביבה פתוחה קטנה של P בה הפונקציה f קבועה;

ה) התשובות א' עד ד' אינן נכונות.

4) נתון ארבעון ב- $\mathbb{R}^3$ בעל הקדקודים $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. אז הנפח של הארבעון הוא:

א) $1/3$;

ב) $1/2$;

ג) $2/3$;

ד) $3/2$;

ה) התשובות א' עד ד' אינן נכונות.

5) נתבונן בתת קבוצות הבאות ב- $\mathbb{R}^3$:

$$D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x^2 + y^2 < 1, z^2 = 1 \right\} \quad D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x^2 + y^2 = 1, z^2 < 1 \right\}$$

$$D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x^2 + y^2 = 1, z^2 = 1 \right\} \quad D_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x^2 + y^2 < 1, z^2 < 1 \right\}$$

כמה מבין ארבעת הקבוצות הן בעלות נפח אפס?

א) 0;

ב) 1;

ג) 2;

ד) 3;

ה) 4.

דף נוסחאות

קואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta\,, dxdy = rdrd\theta$$
$$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

קואורדינטות גליליות:

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta\,, z = z, dxdydz = rdrd\theta dz$$
$$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

קואורדינטות כדוריות:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta\,, y = \rho\sin\phi\sin\theta\,, z = \rho\cos\phi\,, dxdydz = \rho^2\sin\phi\, d\rho d\theta d\phi$$
$$\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$$