חדו"א וקטורי להנדסת חשמל, מועד ג.
אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.9631 מרצים: י.דן-כוהן, א. טיומקין, ד.קרנר תאריך: 17.03.2019 משך בבחינה: שלוש שעות ניקוד: סה"כ 105 נקודות (מי שיצבור 100 נקודות או יותר ציונו יהיה 100.) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים	בבחינה חמש שאלות פתוחות וחמש שאלות אמריקאיות. משקל כל שאלה פתוחה מסומן ליד השאלה. משקל כל שאלה אמריקאית – 4 נקודות. את הפתרונות לשאלות הפתוחות יש לכתוב בכתב יד קריא ובמקומות המיועדים לכך בטופס הבחינה. הפתרונות צריכים להיות חדים, קצרים ומנומקים היטב. את ההגדרות יש לכתוב בניסוחים מלאים בדומה לניסוחיהן בהרצאות ו/או בספר הקורס. דפי הטיוטה יגרסו ולא יבדקו! את התשובות לשאלות האמריקאיות יש לסמן בצורה ברורה בטופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. תשובות מרובות תפסלנה! אין צורך לנמק את התשובות לשאלות האמריקאיות.

בהצלחה!

נוסחאות שימושיות

קואורדינטות קוטביות: $x = r\ cos\theta$, $y = r\ sin\theta$, $dxdy = rdrd\theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

קואורדינטות גליליות: $x = r\ cos\theta$, $y = r\ sin\theta$, $z = z$, $dxdydz = rdrd\theta dz$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

קואורדינטות כדוריות: $x = r\ sin\phi\ cos\theta$, $y = r\ sin\phi\ sin\theta$, $z = r\ cos\phi$,
$dxdydz = r^2\ sin\phi drd\theta d\phi$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

(1) (20 נקודות)

(א) (5 נקודות) הגדירו את המושג "נגזרת כיוונית של פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ בכיוון $\vec{v}$".

(ב) (5 נקודות) תהי $f(x,y,z)=sin(e^x)+ln(3/2-y^2)-z^2$ ונקבע $\vec{v}=\nabla f(1,1,1)$.
הוכיחו/הפריכו: $D_{\vec{v}}f|_{(1,1,1)}>0$.

(ג) (10 נקודות) תהי $f(x,y,z)=sin(e^x)+ln(3/2-y^2)-z^2$ וניקח $S=\{x^4+y^4+z^4=1\}$.
האם פונקציה $D_{\vec{v}}f$ חסומה על S?

(2) (20 נקודות)

(א) (5 נקודות) הגדירו את רוטור של שדה וקטורי, $curl(\vec{F})$.

(ב) (5 נקודות) נניח שפונקציה $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ממחלקה C^2, מקיימת $(\nabla f(x))^t \cdot \mathcal{H}_f(x) \cdot \nabla f(x) < 0$ בנקודה מסוימת $x \in \mathbb{R}^3$. האם x יכולה להיות נקודת מקסימום מקומי של f?

(ג) (10 נקודות) תהיינה $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ פונקציות C^1. נניח ש $g_1(0) = g_2(0) = g_3(0) = 0$, ומתקיים $(\frac{dg_1}{dt}|_0 \times \frac{dg_2}{dt}|_0) \cdot \frac{dg_3}{dt}|_0 \neq 0$. הוכיחו: התמונה של פונקציה $g_1(x)+g_2(y)+g_3(z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ מכילה כדור פתוח.

(3) (15 נקודות) חשבו $\int\limits_{\gamma}\left(\frac{ydx}{x^2+y^2}-\frac{xdy}{x^2+y^2}+(x+y)dz\right)$ לאורך העקומה $.\gamma=\left\{(sin(t),cos(t),t)|\ t\in[0,2\pi]\right\}\subset\mathbb{R}^3$

(4) (15 נקודות) חשבו את השטף של השדה $F = (x^4, y^8, z)$ דרך המשטח $S = \{x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1\}$ עם נורמל פנימי $\mathcal{N}$, כלומר $\iint\limits_S F \cdot \mathcal{N} d\sigma$.

(5) (15 נקודות) חשבו את $\iiint\limits_V |y|e^{x^2}\,dxdydz$ עבור $V = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{array}{c} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le 1 \\ x^2 \le z \le 1 \end{array} \right\}$.

שאלות אמריקאיות

לכל שאלה יש תשובה נכונה אחת בלבד. יש לסמן בבירור את תשובה שבחרת. תשובות מרובות תיפסלנה.

(1) נקבע נקודות $(1,2,3,4)$, $(0,1,2,3)$, $(1,1,3,3)$ ב $\mathbb{R}^4$.
(א) למשולש עם קודקודים בקודות אלו אין צלעות באורך שווה.
(ב) הנקודות נמצאות על ישר אחד.
(ג) הנקודות לא נמצאות על מישור דו-מימדי אחד.
(ד) הנקודות מהוות שפה של קבוצה קומפקטית.
(ה) התשובות א'-ד' אינן נכונות.

(2) נגדיר קבוצה $\mathbb{R}^2 \supset (0,0) \cup \left\{y = tan^2\frac{1}{t},\ x = tan\frac{1}{t},\ t \in (-\infty, -\frac{2}{\pi}) \cup (\frac{2}{\pi}, \infty)\right\} = X$.
(א) הקבוצה הינה פתוחה.
(ב) הקבוצה הינה קומפקטית.
(ג) הקבוצה הינה חסומה.
(ד) הקבוצה הינה קשירה מסילתית.
(ה) $\partial X = \varnothing$.
(ו) התשובות א'-ד' אינן נכונות.

(3) נגדיר פונקציה בקואורדינטות קוטביות, $f(x,y) = \begin{cases} r \cdot \phi,\ 0 \leq \phi < 2\pi,\ r \neq 0 \\ 0,\ r = 0 \end{cases}$.
(א) f לא רציפה בנקודה $(0,0)$.
(ב) ל f קיימות נגזרות חלקיות אך f אינה דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.
(ג) f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ אך לא C^1.
(ד) f הינה C^1 ב $(0,0)$.
(ה) התשובות א'-ד' אינן נכונות.

(4) נניח שפונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ הינה C^2 ומקיימת בנקודת קיצון: $det(\mathcal{H}f(P)) \cdot trace(\mathcal{H}f(P)) < 0$.
(א) הנקודה P בהכרח נקודת מקסימום מקומי של f.
(ב) הנקודה P בהכרח נקודת אוכף של f.
(ג) הנקודה P בהכרח נקודת מינימום מקומי של f.
(ד) לא ניתן לקבוע את סוג של P לפי הנתונים לעיל.
(ה) התשובות א'-ד' אינן נכונות.

(5) נתבונן בשדה $\vec{F} = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ בתחום הגדרתו.
(א) $\vec{F}$ שדה משמר מקומית, אך לא גלובלית.
(ב) $\vec{F}$ שדה משמר גלובלית.
(ג) שדה $\vec{F}$ מקיים: $div(\vec{F}) = 0$.
(ד) ל $\vec{F}$ קיימת פונקצית פוטנציאל שהיא אנטי-סימטרית ב x, y.
(ה) התשובות א'-ד' אינן נכונות.