אתגר 10

באתגר זה תגלו מספר תכונות מפתיעות של כדורים במימדים גבוהים. יהי R מספר חיובי. נתבונן בכדור ה n-מימדי:

$$B(n,R)=\{X\in\mathbb{R}^n \mid \|X\|\leq R\}$$

1) הוכיחו כי
א) $vol_n\big(B(n,R)\big)=R^n vol_n\big(B(n,1)\big)$; הסיקו מזה שלכל $\epsilon>0$, אחוז הנפח של הכדור ברדיוס R הכלוא בתוך כדור ברדיוס $R-\epsilon$ שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף. נסמן $V_n := vol_n\big(B(n,1)\big)$
ב) $V_{n+1}=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n/2}dt\cdot V_n$. היעזרו בנוסחת נסיגה ע"מ להוכיח כי $\lim_{n\to\infty}V_n=0$. רמז: מבלי לחשב את האינטגרל, הראו כי לכל n מספיק גדול, $0<\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n/2}dt<\frac{1}{2}$;
ג) לכל $\epsilon>0$, אחוז הנפח בכדור $B(n,R)$ הכלוא בין $-\epsilon\leq x_n\leq\epsilon$ שואף ל- 100% כאשר n שואף לאינסוף.

<u>הערה:</u> הסעיפים א' וג' מראים, שבמימדים גבוהים רוב הנפח של הכדור מתרכז ליד פני הכדור ורובו גם מתרכז בסביבת ספרות המשווה.

2) בעזרת האינטגרציה בחלקים הוכיחו כי

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n/2}dt=n\left(\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-2/2}dt-\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n/2}dt\right)$$

והסיקו מזה את הנוסחאות עבור $\int_{-1}^{1}(1-t^2)^m dt$ ו- $\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{2m+1/2}dt$ לכל m טבעי. בעזרת הנוסחאו שמצאתם, חישבו את V_1,V_2,V_3,V_4,V_5.

3) הוכיחו את הנוסחאות הבאות עבור הנפח של כדור:
א) $vol_{n+2}(B(n+2,R))=\frac{2\pi R^2}{n+2}vol_n(B(n,R))$;
ב) $vol_{2m}(B(2m,R))=\frac{\pi^m}{m!}R^{2m}$;
ג) $vol_{2m+1}(B(2m+1,R))=\frac{2(m!)(4\pi)^m\pi^m}{(2m+1)!}R^{2m+1}$;