אתגר 6

תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת של משתנה מרוכב. אומרים ש- f *הולומורפית* בנקודה z אם ורק אם קיים סקלר $\alpha\in\mathbb{C}$ כך ש- $f(z+h)=f(z)+\alpha h+o(|h|)$ כאשר $h\in\mathbb{C}$. הסקלר α נקרא ***הנגזרת*** של f בנקודה z.

סימון: $f'(z)\coloneqq\alpha$.

א. תהינה $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציות הולומורפיות ב- z. הוכיחו כי הפונקציות $f+g, f\cdot g$ הולומורפיות ב- z גם כן ומתקיים: $(f+g)'=f'+g', (f\cdot g)'=f'g+fg'$.

ב. תהי $f(z)=\sum_{i=0}^{n}c_iz^i\in\mathbb{C}[z]$. הוכיחו כי f הולומורפית בכל נקודה z ומתקיים: $f'(z)=\sum_{i=1}^{n}ic_iz^{i-1}$.

אם נחשוב על $\mathbb{C}$ כמישור ממשי, אז פונקציות מרוכבות $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ מתאימות לפונקציות ממשיות $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ באופן הבא: אם $f(x+iy)=u(x,y)+iw(x,y)$ כאשר $u(x,y)=Re\big(f(x+iy)\big), w(x,y)=Im\big(f(x+iy)\big)$ אז הפונקציה הממשית המתאימה היא $F(x,y)=\big(u(x,y),w(x,y)\big)$. ולהפך, לפונקציה $F(x,y)=\big(u(x,y),w(x,y)\big)$ מתאימים את הפונקציה המרוכבת $f(x+iy)=u(x,y)+iw(x,y)$.

ג. הוכיחו כי f הולומורפית בנקודה $z=x+iy$ אם ורק אם הפונקציה המתאימה $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ דיפרנציאבילית בנקודה (x,y) ומקיימת את משוואות קושי-רימן: $\frac{\partial w}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ ו- $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial w}{\partial x}(x,y)$. רשמו במפורש את הקשר בין $DF(x,y)$ לבין $f'(z)$.