

אתגר 9

באתגר זה נבנה בשלבים שתי קבוצות מוזרות במישור \mathbb{R}^2 : האחת היא קבוצה פתוחה וחסומה שאין לה שטח, והשנייה היא קבוצה קומפקטית שגם לה אין שטח.

הוכיחו כי

1. הקבוצה Q של כל הנקודות בעלות שתי קואורדינטות רציונליות בריבוע הפתוח $\mathbb{R}^2 \subset (0,1) \times (0,1)$ היא קבוצה בת מניה. הסיקו מזה שקיימת סדרה של נקודות $P_i \in Q$ כך ש- $Q = \{P_i\}_{i=1}^{\infty}$;
2. לכל i קיים $0 < r_i < \frac{1}{3^i}$ כך ש- $B_{r_i}(P_i) \subset (0,1) \times (0,1)$;
3. הקבוצה $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(P_i)$ היא קבוצה פתוחה ומתקיים: $Q \subseteq D \subseteq (0,1) \times (0,1)$;
4. $A_L(D) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi}{9^i} = \frac{\pi}{8}$ (סעיף קשה)
5. $A_U(D) = 1$. הסיקו מזה שלקבוצה D אין שטח;
6. הקבוצה ∂D היא קבוצה קומפקטית המקיימת: $\partial D = ([0,1] \times [0,1]) \setminus D$ ו- $\partial D = \partial(\partial D)$;
7. לקבוצה ∂D אין שטח.