שאלות חזרה בחדו"א

הגדרות

הגדירו את המושגים הבאים: *גבול של פונקציה בנקודה, טור מתכנס בתנאי, פונקציה רציפה במידה שווה, סדרה מונוטונית, פונקציה גזירה בנקודה נתונה, חסם עליון של קבוצת מספרים.*

חישובים

1. מצאו את המינימום של הפונקציה $f(x) = x^x$ בקטע $\left[\frac{1}{\pi}, \pi\right]$.
2. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{(1-\cos x)\sin x}$.
3. חשבו את האינטגרל $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$.
4. תהי $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ פונקציית הקוסינוס ההיפרבולי, ויהי $P_3(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר 3 סביב 0. הראו כי $\left|\cosh\left(\frac{1}{10}\right) - P_3\left(\frac{1}{10}\right)\right| < 10^{-5}$ וחשבו את $P_3\left(\frac{1}{10}\right)$.
5. חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \left(\frac{x}{x^2-3x-10} + xe^x\right) dx$.
6. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+2\sqrt{1-x^2}-3-x}{x\sin x}$.
7. מצאו את המינימום ואת המקסימום של הפונקציה $f(x) = (x^2-3)e^x$ בקטע $[-4,2]$.
8. עבור אילו ערכים של הפרמטרים $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים: $x - (a + b\cos x)\sin x = o(x^4)$ כאשר $x \to 0$.
9. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \ln(1+x^2)\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
10. חקרו את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$.

הבנה

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ולא חסומה אז הסדרה $b_n = \frac{2a_n-1}{3a_n+2}$ מתכנסת, ומתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{3}$.
2. אם $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה פעמיים ולמשוואה $f(x) = x + 1$ יש שלושה פתרונות שונים אז קיים $c \in \mathbb{R}$ עבורו $f''(c) = 0$.
3. אם $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה וגזירה, ו- $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ אז $f(x)$ פונקציה חסומה.
4. לכל שתי סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיים: $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) - \liminf\limits_{n\to\infty}(b_n)$.
5. אם f פונקציה גזירה בקטע $(0,1)$ ו- $|f'(x)| \le 2018$ לכל $x \in (0,1)$ אז f חסומה בקטע $(0,1)$.

הוכחות

1. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(x) = x^2 \arctan x$. הוכיחו כי f הפיכה וכי הפונקציה ההפוכה f^{-1} גזירה ב- y_0 אם"ם $y_0 \neq 0$.
2. הוכיחו כי לכל $n \ge 2$ טבעי, למשוואה $\arctan x = \frac{x}{n}$ קיים פתרון יחיד בקרן $(0,\infty)$, נסמנו a_n. הראו כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה ושואפת לאינסוף.

שאלות חזרה באלגברה

הגדרות

הגדירו את המושגים הבאים: *המימד של מרחב וקטורי, סדרה פורשת, בסיס אורתוגונלי, מטריצת הייצוג של טרנספורמציה לינארית, קואורדינטות של וקטור לפי בסיס, ערך עצמי של מטריצה, מכפלה פנימית (סקלרית), הגרעין של טרנספורמציה לינארית.*

חישובים

1. נתונות מטריצות עם רכיבים מרוכבים $B = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$. מצאו את $\det(AB), adj(A), A^{-1}, 2A+B$.
2. תהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו את הפולינום האופייני $P_A(t)$ של A, את הע"ע של A, את המרחבים העצמיים של A, וגם מטריצה C הפיכה ומטריצה D אלכסונית כך ש- $C^{-1}AC = D$.
3. יהיו $U = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ו- $W = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| x+y-z = 2x+2y+w = 0\right\}$ ת מרחבים של $\mathbb{R}^4$. מצאו בסיסים של U, W ואת המימדים של התת מרחבים $U+W$, $U \cap W$.
4. יהי $\mathbb{R}^4$ מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית סטנדרטית ויהי $U = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. מצאו סדרה פורשת ל- $U^\perp$, בסיס אורתונורמלי של U, את הווקטור $u \in U$ הקרוב ביותר לווקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, ואת הווקטור $w \in U^\perp$ הקרוב ביותר ל- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
5. תהי $A = \begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}$. מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה אוניטרית U עבורן $U^*AU = D$.

הוכחות

1. יהיו $U_1, U_2, W \subset \mathbb{R}^n$ תת מרחבים המקיימים $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, $U_1 \cap W \neq \{0\}$, $U_2 \cap W \neq \{0\}$. הוכיחו כי $\dim W \geq 2$.
2. יהיו $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^n$ וקטורים עבורם $\|\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$ לכל $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי $b_1, \ldots, b_n$ בסיס אורתונורמלי.
3. יהי $(b_1, \ldots, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ בסיס אורתונורמלי. הוכיחו כי $tr(A) = \sum_{i=1}^n (Ab_i, b_i)$ לכל $A \in M_n(\mathbb{R})$.
4. תהינה $A, B \in M_{2019}(\mathbb{R})$ מטריצות ריבועיות המקיימות $AB + BA = 0$. הוכיחו כי לפחות אחת מבין שתי המטריצות A, B אינה הפיכה.