

# חדו"א וקטורי להנדסת חשמל: תרגיל 10

המרצים: ישי דן-כהן, איליה טיומקין ודמיטרי קרנר.

## תרגילים מספר הקורס

מס' עמוד	מס' שאלה
243	6.25, 6.24
244	6.30, 6.29
252	6.38
276	6.61, 6.60, 6.58, 6.57
277	6.67

## תרגילים נוספים

- (1) חישוב את האינטגרלים הבאים  $\int_D f(X) d^n X$  כאשר:
- (א)  $D = [-1,1]^4 \subset \mathbb{R}^4$  קוביה ו-  $f(x, y, z, w) = 1 + y \sin x + z - e^w$
- (ב)  $D \subset \mathbb{R}^2$  הוא התחום החסום ע"י שני הצירים והקשת הקצרה של המעגל בעל המרכז בנקודה (1,1) ורדיוס 1 המשיקה לשני הצירים ו-  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$
- (ג)  $D \subset \mathbb{R}^2$  הוא המשולש המלא בעל הקדקודים (1,0), (0,1), (1,1) ו-  $f(x, y) = \sin(y^2) + \sin(x^2)$
- (ד)  $D \subset \mathbb{R}^3$  הוא התחום החסום ע"י  $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$  ו-  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$
- (ה)  $D \subset \mathbb{R}^3$  הוא התחום החסום ע"י  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$  ו-  $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2 - 9z^2}$
- (2) יהי  $a > 0$  פרמטר ממשי. חישוב את השטחים והנפחים הבאים:
- (א) השטח החסום ע"י  $x^2 + y^2 \geq a^2, x^2 + y^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
- (ב) הנפח החסום ע"י  $z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2$ ; רמז: השתמשו בקואורדינטות גליליות. התשובה תכלול את האינטגרל  $\int_0^\pi \sqrt{\sin \theta} d\theta$  אותו אין צורך לחשב.
- (ג) הנפח החסום ע"י  $x = 0, z = a \arctan \frac{y}{x}, z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} = a^2 \arctan \frac{y}{x}$
- (ד) הנפח החסום ע"י  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2$
- (3) מצאו את מרכז המסה של דיסקית אחידה במישור  $x, y$  החסומה ע"י המסילה  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$  כאשר  $0 \leq t \leq 2\pi$  וציר ה- $y$ .
- (4) נתבונן בפירמידה  $D = \{X \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}$ . הוכיחו כי לכל פונקציה רציפה  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  מתקיים:  $\int_D \prod_{i=1}^n f(x_i) dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{n!} \left( \int_0^1 f(t) dt \right)^n$ . היעזרו בנוסחה ע"מ לחשב את נפח הפירמידה.
- (5) הוכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי: תהינה  $D \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה קומפקטית בעלת נפח ו-  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרלית. אם הפונקציה  $f$  רציפה והקבוצה  $D$  קשירה מסילתית אז קיימת נקודה  $P \in D$  עבורה  $\int_D f(X) d^n X = f(P) \cdot \text{vol}_n(D)$ . ע"י מציאת דוגמאות מתאימות, המחישו את חשיבותן של הנחת הקשירות והנחת הרציפות. האם לדעתכם הנחת הקומפקטיות הכרחית גם היא (אין צורך לנמק)?