חדו"א וקטורי להנדסת חשמל: תרגיל 13

המרצים: ישי דן-כהן, איליה טיומקין ודמיטרי קרנר.

קראו את הפרק 8.3 בספר הקורס.

תרגילים מספר הקורס

מס' עמוד	מס' שאלה
158	3.50
159	3.56
342	8.4 ,8.3 ,8.2
345	8.13 ,8.11
351	8.19 ,8.17
365	8.31

תרגילים נוספים

1) בעזרת נוסחת גרין חישבו את:
   א) האינטגרל $\oint_C e^x(1-\cos y)dx - e^x(y-\sin y)dy$ כאשר העקום C הוא השפה של התחום החסום ע"י $0<x<\pi\,,0<y<\sin x$ בעל אוריינטציה חיובית (נגד כיוון השעון);
   ב) השטח החסום ע"י המסילה $\gamma(t)=(\cos^3(t)\,,2\sin^3(t))$ כאשר $0\le t\le 2\pi$.
2) תהי $\phi(x_1,\dots,x_n)$ פונקציה הנתונה ע"י $\phi(X)=\|X\|^a$ ויהי $F(X)=\nabla\phi$.
   א) לכל n מצאו $a\neq 0$ כך ש- $div(F)=0$ (או הוכיחו שאינו קיים);
   ב) עבור $n=3$ ו- a שמצאתם בסעיף א' חישבו ישירות לפי ההגדרה את השטף של F דרך פני כדור היחידה עם מרכז בראשית ביחס לנורמל חיצוני. האם התוצאה שקיבלתם סותרת את משפט גאוס (משפט הדיברגנץ במימד שלוש)? אם לא - הסבירו למה אין סתירה, ואם כן - פרסמו מאמר.
3) תהי $D\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית, ויהי $F:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ שדה וקטורי גזיר ברציפות.
   א) הוכיחו כי אם F הוא שדה משמר אז $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ לכל i,j. בפרט, אם $n=2,3$ ו- F משמר אז $curl(F)=0$;
   ב) תנו דוגמה של שדה לא משמר בעל רוטור אפס ($curl(F)=0$).
4) יהי $S\subset\mathbb{R}^3$ החצי העליון של הטורוס המתקבל ע"י סיבוב המעגל $z=0=(x-3)^2+y^2-1$ סביב ציר ה- y. נסמן ב- $R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ את השיקוף ביחס למישור y,z המוגדר ע"י $R\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\\z\end{pmatrix}$, יהי $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ שדה וקטורי ממחלקה C^1 המקיים: $F\circ R=R\circ F$. הראו כי $\int_S curl(F)\cdot n d\sigma=0$.
5) נתבונן במשוואה דיפרנציאלית: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (או לחילופין, $P(x,y)+Q(x,y)y'(x)=0$) כאשר $P(x,y),Q(x,y)$ הן פונקציות גזירות ברציפות בתחום פתוח D. נסמן $F=\binom{P}{Q}$. אם השדה F הוא שדה משמר אז משוואה כזו נקראת *משוואה דיפרנציאלית מדויקת*. תהי g פונקציית פוטנציאל של F. הוכיחו כי
   א) פונקציה $y(x)$ היא פתרון של המשוואה אם"ם קיים $c\in\mathbb{R}$ עבורו $g(x,y(x))=c$;
   ב) אם $Q(x_0,y_0)\neq 0$ עבור $(x_0,y_0)\in D$ אז בסביבת הנקודה למשוואה דיפרנציאלית מדויקת יש פתרון;
   ג) המשוואה $\left(2+2\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)\right)dx+\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)dy=0$ בעיגול היחידה סביב הראשית היא משוואה מדויקת. פתרו את המשוואה בסביבת נקודה (x_0,y_0).