חדו"א וקטורי להנדסת חשמל: תרגיל 6

המרצים: ישי דן-כהן, איליה טיומקין ודמיטרי קרנר.

תרגילים מספר הקורס

מס' עמוד	מס' שאלה
145	3.35
146	3.37, 3.39
147	3.40, 3.41, 3.43

תרגילים נוספים

1) תהי $F=\binom{f_1}{f_2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ פונקציה C^1 המקיימת את המשוואות הבאות[1]: $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ ו- $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$. הוכיחו כי
א) $JF(X)=0$ אם"ם $DF(X)=0$;
ב) אם $DF(X)\neq 0$ אז בסביבה קטנה של $F(X)$ יש ל- F פונקציה הפוכה ו- F^{-1} מקיימת את משוואת קושי-רימן.

2) נתונה מערכת משוואות ב- $\mathbb{R}^5$: $\begin{cases} x=u+\ln w \\ y=w-\ln u \\ z=2u+w \end{cases}$. הוכיחו כי בסביבת הנקודה $(x,y,z,u,w)=(1,1,3,1,1)$ המשתנים z,u,w ניתן להציג כפונקציות של x,y; וחישבו את הנגזרות החלקיות $\frac{\partial z}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3) תהינה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, $F:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ פונקציה C^1 ו- $Q\in\mathbb{R}^n$ נקודה כלשהיא. תהינה $P_1,\dots,P_m\in U$ נקודות שונות עבורן $F(P_i)=Q$ ו- $JF(P_i)\neq 0$ לכל i. הוכיחו כי קיים $\epsilon>0$ כך שלכל $\|Q'-Q\|<\epsilon$ מתקיים: למשוואה $F(X)=Q'$ יש לפחות m פתרונות שונים ב- U.

4) הוכיחו כי למשוואה $e^{y-1}+\ln y+x^4=1$ יש פתרון $y=y(x)$ בסביבת הנקודה $(0,1)$. הראו כי לפונקציה $y(x)$ יש נקודה קריטית ב- $x=0$. האם זהו מקסימום\מינימום מקומי?

5) תהי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות. נניח כי $\nabla f\cdot e_i\neq 0$ לכל i כאשר $\{e_1,e_2,e_3\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. הראו כי המשוואה $f(x,y,z)=0$ מגדירה את כל אחד מהמשתנים כפונקציה דיפרנציאבילית של שניים האחרים ומתקיים: $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

6) תהינה $F,G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ פונקציות וקטוריות גזירות ברציפות (ממחלקה C^1). נסמן $\nabla F:=DF^t=\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$. הוכיחו כי $\nabla(F\cdot G)(X)=\nabla F(X)G(X)+\nabla G(X)F(X)$ לכל $X\in\mathbb{R}^n$. הסיקו מזה שאם $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פוטנציאל חשמלי ממחלקה C^2 ו- $E=-\nabla\phi$ השדה החשמלי המתאים אז $(DE)E=\frac{1}{2}\nabla(\|E\|^2)$.

<u>הערה</u>: יהי $q\vec{r}$ דו-קוטב (דיפול) קטן הממוקם בנקודה A בשדה חשמלי E. נניח כי הדו-קוטב מיושר עם השדה, כלומר $\vec{r}$ מקביל ל- $E(A)$. אז הכוח שהשדה מפעיל על הדו-קוטב הוא $qE(A+\vec{r})-qE(A)\approx qDE(A)\vec{p}$ פרופורציונלי ל- $DE(A)E(A)$, והנוסחה לעיל מסבירה למה דו-קוטב כזה נשאב בכיוון של הגידול המרבי של השדה.

[1] משוואות אלו נקראות משוואות קושי-רימן ומשחקות תפקיד חשוב בתורת הפונקציות המרוכבות