

# חדו"א וקטורי להנדסת חשמל: תרגיל 9

המרצים: ישי דן-כהן, איליה טיומקין ודמיטרי קרנר.

## תרגילים מספר הקורס

מס' עמוד	מס' שאלה
220	6.1, 6.4, 6.5
235	6.12, 6.14
236	6.15, 6.16, 6.17, 6.19
237	6.21

## תרגילים נוספים

- (1) תהי  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  מסילה גזירה ברציפות.  
 (א) הוכיחו כי קיים  $M$  עבורו  $\|\gamma'(t)\| < M$  לכל  $t \in (a, b)$ ;  
 (ב) הראו כי השטח הכולל של כל הריבועים בסריג  $\frac{1}{2^n}$  החותכים את העקומה  $\gamma([a, b])$  הוא לכל היותר  

$$\left(2M(b-a) + \frac{2}{2^n}\right)^2$$
  
 (ג) חלקו את הקטע  $[a, b]$  ל-  $2^n$  חלקים שווים והיעזרו בסעיף ב' ע"מ להראות שהשטח הכולל של כל הריבועים בסריג  $\frac{1}{2^n}$  החותכים את העקומה  $\gamma([a, b])$  הוא לכל היותר  $\frac{1}{2^n} (2M(b-a) + 2)^2$ ;  
 (ד) הוכיחו כי כל קבוצה קומפקטית  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  המקיימת  $\partial D \subseteq \gamma([a, b])$  היא קבוצה בעלת שטח;  
 (ה) הסיקו שאם קבוצה  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  חסומה ע"י מספר סופי של מסילות גזירות ברציפות אז  $D$  היא בעלת שטח.  
 (2) הוכיחו כי הנפח של הקבוצות הבאות הוא אפס:  
 (א) קבוצה חסומה  $X \subset \mathbb{R}^3$  המוכלת במישור  $x, y$ ;  
 (ב)  $Y \times Z \subset \mathbb{R}^3$  כאשר  $Y \subset \mathbb{R}^2$  היא קבוצה בעלת שטח אפס ו-  $Z \subset \mathbb{R}$  קבוצה חסומה.  
 (3) תהי  $D \subset \mathbb{R}^2$  קבוצה קומפקטית ויהי  $M$  סקלר כך ש-  $\|X\| < M - 1$  לכל  $X \in D$ . נגדיר פונקציה אופיינית של הקבוצה  $D$  ע"י  $\phi_D(X) = \begin{cases} 1, & X \in D \\ 0, & X \notin D \end{cases}$ . הוכיחו כי הקבוצה  $D$  היא קבוצה בעלת שטח אם ורק אם הפונקציה  $\phi_D$  אינטגרבילית בריבוע  $[-M, M]^2$ . הראו כי במקרה כזה השטח של  $D$  נתון ע"י  $\iint_{[-M, M]^2} \phi_D dA$ .  
 (4) החליפו את סדר האינטגרציה באינטגרלים הבאים:  
 (א)  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$   
 (ב)  $\int_0^{\pi/2} \int_{\cos x}^1 f(x, y) dy dx$   
 (5) הציגו את הנפח של התחום הנתון ע"י  $0 \leq y \leq 1 - x^2 - y^2, x \geq 0 \geq z \leq 1 - x^2 - y^2$  כאינטגרל חוזר בשלוש דרכים שונות.  
 (6) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:  
 (א) אם  $f, g: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות לא אינטגרביליות אז הפונקציה  $f(x, y)g(x, y): [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  אינה אינטגרבילית;  
 (ב) אם קבוצות קומפקטיות  $D, K \subset \mathbb{R}^3$  הן בעלות נפח אז הקבוצה  $D \cup K$  בעלת נפח גם היא.