

יסודות תורת הפונקציות המרוכבות להנדסה

מועד ג'

אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.0071	כללים: אסור לכתוב בצבע אדום.
תאריך: 04.09.2019	הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך).
משך המבחן: 3 שעות	בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".
ניקוד: (סה"כ 105 נקודות)	
מרצים: נ. איידלשטיין, י. שטראוס, ד. קרנר	
מתרגלים: י. דיקשטיין, מ. פורת	
הבחינה מותרת לפרסום אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני	

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(1) (10 נקודות) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_1(0))$ לא קבועה. נגדיר שדה וקטורי $\vec{F} = (Re(f), Im(f))$. האם השדה בהכרח משמר מקומית?

(2) (15 נקודות) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_1(0))$. נניח ש $f'(\frac{1}{n}) = \frac{n^2}{n^2+1}$ וגם $f(0) = 3\pi$. חשבו את $f(\frac{1}{2})$.

(3) (20 נקודות) נגדיר פונקציה $f(z) = \frac{\sin(z) - \cos(z)}{(z - \frac{\pi}{4})^3}$. האם קיימת לה פונקציה קדומה בתחום $Ball_1(0) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$? אם קיימת, האם הפונקציה הקדומה הינה אנליטית בתחום זה?

(4) (20 נקודות) תהי $\overline{Ball_1(0)} \xrightarrow{f} \overline{Ball_1(0)}$ אנליטית. נניח ש $ord_0(f) \geq n$. הוכיחו: $|f(z)| \leq |z|^n$.

(5) (20 נקודות) חשבו: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a \cdot \cos(t)+a^2}$, עבור a ממשי המקיים: $|a| < 1$.

(6) (20 נקודות) יהי $\mathcal{U} = \{0 < |z| < \frac{1}{2}\}$ ונניח ש $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ מקיימת $|f(z)| \leq \ln \frac{1}{|z|}$ ב \mathcal{U} . הוכיחו ש f ניתנת להרחבה לפונקציה אנליטית בנקודה $z = 0$.

בהצלחה!