



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטיין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 0.

התרגיל הנו תרגיל חזרה/רענון על החומר הנלמד בביה"ס, בקורסים חדו"א 3,2,1 ואלגברה לינארית.

- (1) (א) חשבו i^n , כאן $n \in \mathbb{Z}$
 (ב) יהי $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $0 \neq z$. בטאו בעזרת x, y את הביטויים הבאים: i. $Re(\frac{1}{z})$, ii. $Im(\frac{1}{z^2})$
 (ג) הוכיחו: i. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, ii. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$
 iii. $|z - w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$ (מתי מתקיים השוויון?)
 (ד) רשמו את נוסחאות המעבר בין הצגה קוטבית, $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$, לבין הצגה קרטזית, $z = x + iy$.
 (ה) הוכיחו כי $x_{\pm} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$ הינם פתרונות של המשוואה $x^2 + a_1x + a_0 = 0$, כאשר $a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.
 (ו) פתרו את המשוואות: i. $z^4 = 2 - i\sqrt{12}$, ii. $|z| + z = 1 - i$.
 (ז) יהי $n \in \mathbb{N}$. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^n = 1$.
 (ח) הוכיחו: אם $|z|, |w| < 1$ אז $|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}| < 1$. (לתרגיל "חישובי" זה תהיה חשיבות רבה בהמשך)

(2) הוכיחו או הפריכו (בעזרת דוגמא נגדית):

- (א) עבור כל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים: $z^4 + 4 = (z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 + i)(z + 1 - i)$
 (ב) יהי $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ פולינום. אם $p(z_0) = 0$ אז גם $p(\bar{z}_0) = 0$.

(3) ההעתקה הלינארית (מרוכבת) $\mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathbb{C}$, $z \rightarrow i \cdot z$, משרה העתקה לינארית ממשיית, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^2$. רשמו את המטריצה המייצגת של ההעתקה לפי הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^2 .

(4) (א) הגדירו את המושגים הבאים עבור קבוצות ב \mathbb{R}^2 : קבוצה פתוחה, סגורה, קומפקטית, קשירה מסילתית, פשוטת קשר; נקודת פנים, נקודת שפה, סגור של קבוצה.

(ב) בדקו את כל התכונות/המושגים של סעיף א' עבור קבוצות ב $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ המוגדרות ע"י תנאים הבאים:

- i. $az + b\bar{z} = c$, ii. $Re(z(1-i)) < \sqrt{2}$, iii. $|z-1| = 2+i$, iv. $z^2 + \bar{z}^2 = 2$
 v. $|z-i| = |z+i|$, vi. $|z-1| + |z-5| < 4$, vii. $|z-1| \leq |z-5|$.
 (ג) הוכיחו: $X \subseteq \mathbb{R}^2$ סגורה אמ"מ $\mathbb{R}^2 \setminus X$ פתוחה.

(5) (א) הגדירו התכנסות של סדרה ב \mathbb{R}^2 , $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$.

(ב) נגדיר סדרה $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{i+a_n}$. האם היא מתכנסת? (כסדרה ב \mathbb{R}^2)

(6) (א) הגדירו את המושגים: תחום ההתכנסות, התכנסות בהחלט/בתנאי/במ"ש. בדקו את כל תכונות ההתכנסות עבור הטורים:

- i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^6} x^n$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2\sin(x))^n}{n^2+300}$, iii. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^{n^3}}{n!}$

(ב) פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור (סביב הנקודה $x=0$). בדקו את כל תכונות ההתכנסות עבור הטורים.

- i. $f(x) = \sin^2(x^3)$, ii. $f(x) = \sin(1-x) \cdot \cos(1+x)$, iii. $f(x) = \ln(\frac{1}{6-5x+x^2})$.

(7) עבור הפונקציות הבאות בדקו: רציפות, נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות, רציפות של נגזרות חלקיות. (בכל הנקודות)

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot \cos(\frac{y}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{i.} \quad f(x, y) = \sqrt{|xy|} \quad \text{ii.}$$

(8) חשבו את האינטגרלים (כיוון המסילה הוא נגד כיוון השעון): i. $\int_{\{x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}}\}} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$,

$$\text{ii.} \int_{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)} |y| ds, \quad \text{iii.} \int_{y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}} \frac{ds}{y^2}, \quad \text{iv.} \oint_{\{x^2+y^2=36\}} ((e^{x^2} - x^2y)dx + (xy^2 - e^y)dy)$$

(9) נגדיר העתקה $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^3 - 3 \\ \sin(x_1) - e^{x_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ההעתקה הפיכה מקומית. חשבו את מטריצת הנגזרות, $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}$, בנקודות שבהן

(10) העבירו את המשטה $\{(x+y)^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ לצורה קנונית $(\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1)$ ע"י סיבוב של \mathbb{R}^3 . (ודאו שההעתקה הלינארית שלכם היא אכן סיבוב)