יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 1.

(1) (א) בטאו את $sin(5\alpha)$, $cos(4\alpha)$ כפולינומים ב $sin(\alpha)$, $cos(\alpha)$.
(ב) חשבו $\sum_{k=0}^{n} cos(k\phi)$, $\sum_{k=0}^{n} sin(k\phi)$. (כלומר, רשמו את הסכומים כביטויים קצרים דרך cos, sin)
(ג) יהי $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ויהי $z_0 \in \mathbb{C}$. הוכיחו: $p(z_0) = 0$ אמ"מ $p(\overline{z}_0) = 0$.
(ד) הוכיחו שכל השורשים של $p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$ נמצאים בתוך הכדור $\{|z| < 1\}$.
(רמז: נתבונן ב $(1 - z)p(z)$.)

(2) (א) נקבע מספר $a \in \mathbb{C}$ ונגדיר העתקה $\mathbb{C} \xrightarrow{\psi_a} \mathbb{C}$ ע"י $z \to a \cdot z$. הציגו את ψ_a כהעתקה לינארית $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\psi_a} \mathbb{R}^2$ ומצאו את המטריצה המייצגת $[\psi_a]$ (בבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$).
נניח ש $|a| = 1$. בדקו: $[\psi_a] \cdot [\psi_a]^t = \mathbb{I}$, $det[\psi_a] = 1$. מה המשמעות הגאומטרית של ψ_a?

(ב) נגדיר העתקת הצמדה $\mathbb{C} \xrightarrow{\tau} \mathbb{C}$ ע"י $z \to \overline{z}$. האם זאת העתקה לינארית? הציגו את τ כהעתקה לינארית $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ומצאו את המטריצה המייצגת (בבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$). חשבו $[\tau] \cdot [\tau]^t$, $[\tau]$, $det[\tau]$. מה המשמעות הגאומטרית של τ?

(3) (א) תהי $\{z_n\}$ סדרת נקודות ב $\mathbb{C}$. הוכיחו/הפריכו:
(i) $z_n \to z$ אמ"מ $(Re(z_n), Im(z_n)) \to (Re(z), Im(z)) \in \mathbb{R}^2$.
(ii) $z_n \to z$ אמ"מ $|z_n| \to |z|$, $arg(z_n) \to arg(z)\ mod(2\pi)$.
(iii) סדרה $\{z_n\}$ מתכנסת אמ"מ היא סדרת Cauchy.

(ב) חשבו את הגבולות (או הוכיחו כי אינם קיימים):
i. $\lim_{n\to\infty} z^n$ (הבדילו בין מקרים $|z| \leqslant 1$)
ii. $\lim_{z\to\infty} \frac{p(z)}{q(z)}$, כאן $p(z)$, $q(z)$ פולינומים ב z.
iii. $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2-\overline{z}^2}{z^2+\overline{z}^2}$.
iv. $\lim_{z\to 0} \frac{Re(z)\cdot Im(z)^2}{Re(z)^2+Im(z)^4}$.

(4) (א) ציירו את הקבוצות הבאות. אילו מהן פתוחות/סגורות/חסומות/קומפקטיות? תארו את הסגור/הפנים/השפה של הקבוצות. אילו מבין הקבוצות הבאות הן קשירות מסילתית/פשוטות קשר?
i. $\{z|\ 0 < |Im(z)| \leq Re(z)^2\} \subset \mathbb{C}$
ii. $\{z|\ Re(z) > 0,\ |Im(z)| < |sin\frac{1}{Re(z)}|\} \subset \mathbb{C}$
iii. $\{z = e^t(cos(t) + i \cdot sin(t)),\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$
iv. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} Ball_{\frac{1}{n}}(\frac{1}{1+in}) \subset \mathbb{C}$.
v. $\mathbb{C} \subset \bar{\mathbb{C}}$
vi. $\{|Re(z)| \geq 1\} \cup \{\infty\} \subset \bar{\mathbb{C}}$
vii. $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \subset \bar{\mathbb{C}}$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: $X \subset \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה אמ"מ $\mathbb{C} \setminus X$ סגורה.

(ג) תהי $X \subseteq \mathbb{C} \subset \bar{\mathbb{C}}$. הוכיחו/הפריכו:
(i) X פתוחה/סגורה כתת קבוצה של $\mathbb{C}$ אמ"מ X פתוחה/סגורה כתת קבוצה של $\bar{\mathbb{C}}$.
(ii) X קשירה מסילתית/פשוט קשר כתת קבוצה של $\mathbb{C}$ אמ"מ X קשירה מסילתית/פשוט קשר כתת קבוצה של $\bar{\mathbb{C}}$.