יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 10.

(1) (א) נניח ש $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ הינה חח"ע. הוכיחו: $f(z) = az + b$.

(ב) נניח ש $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימות: $|f(z)| \le |g(z)|$ ב $\mathbb{C}$ כולו. הוכיחו: $f(z) = cg(z)$, עבור קבוע $|c| \le 1$.

(ג) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ המקיימת: $|f(z)| \le |z|^{-\frac{3}{2}}$ לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. הוכיחו: $f(z) \equiv 0$.

(ד) האם קיימת $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ שמקיימת: $\{f(n) = 0\}_{n \in \mathbb{N}}$ ול f יש קוטב ב $z = \infty$?

(ה) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_\epsilon(0) \setminus \{0\})$ ונניח ש: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = -1$. הוכיחו: עבור כל קבוע $c \in \mathbb{C}$ קיימת סדרת נקודות $\{z_n\} \to 0$ כך ש $|\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) - c| < 1$.

(ו) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_\epsilon \setminus \{z_0\})$ ונניח ש $ord_{z_0}(f) \neq 0, \pm 1$. הוכיחו: f לא חח"ע ב $Ball_\epsilon \setminus \{z_0\}$.

(2) (א) תהי f מרומורפית ב $\mathbb{C}$ ולא קבועה. הוכיחו: התמונה של f היא קבוצה צפופה ב $\mathbb{C}$.

(ב) תהי f מרומורפית בתחום חסום $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$. עבור כל תת קבוצה סגורה $X \subset \mathcal{U}$ הוכיחו: ל f יש לכל היותר מספר סופי של אפסים וקטבים ב X.

(ג) תהי f מרומורפית ב $\bar{\mathbb{C}}$. הוכיחו: ל f יש מספר סופי של נקודות סינגולריות.

(ד) תהי f מרומורפית ב $\mathbb{C}$. נניח שקיים גבול $\lim\limits_{z\to\infty} |f(z)|$, סופי או אינסופי. הוכיחו ש f פונקציה רציונלית. (מנה של שני פולינומים). הסיקו: אם בנוסף f אנליטית, אז היא פולינום.

(ה) תהי $g \in \mathcal{O}(\mathcal{U} \setminus \{z_0\})$ ו z_0 נקודה סינגולרית עיקרית. תהי $const \neq f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. מה סוג הנקודה z_0 עבור $f(g(z))$?

(ו) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. הוכיחו שקיימות פונקציות $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ כך ש $f(z) = f_0(z) + f_1(\frac{1}{z-a_1}) + \dots + f_n(\frac{1}{z-a_n})$. (רמז: השתמשו בחלק העיקרי של טור לורן בכל נקודה סינגולרית)

(3) (א) חשבו את השאריות של הפונקציות הבאות בכל הנקודות הסינגולריות.

i. $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$ ii. $z^n sin(\frac{1}{z})$ iii. $\frac{1}{sin(z)} - \frac{1}{tan(z)}$ iv. $cos(z)e^{\frac{1}{z}}$.

(ב) הוכיחו/הפריכו:

(i) אם $f \in \mathcal{O}(Ball_\epsilon(0))$ אז $f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\frac{\epsilon}{2}} f(z) sin\frac{1}{z} dz$.

(ii) אם z_0 הינה סינגולריות סליקה של f אז $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$.

(iii) נניח ש $f(z) = -f(-z)$ ו z_0 נקודה סינגולרית מבודדת. אז $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f = \operatorname*{Res}\limits_{z=-z_0} f$. (ומה קורא במקרה הזוגי?)

(iv) תהי f פונקציה זוגית, נניח ש $0, \infty$ נקודות סינגולריות מבודדות. אז $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f = \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f = 0$.

(ג) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_\epsilon(0) \setminus \{0\})$. בטאו את $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}(f(cz))$ בעזרת $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}(f(z))$ ו c.

(ד) חשבו את האינטגרלים הבאים:

i. $\int\limits_{\partial Box} \frac{e^z dz}{tan(z)}$, כאשר $Box = [-6, 6] \times [-1, 1] \subset \mathbb{C}$ ii. $\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{Log(z)dz}{sin^3(z-2i)}$ iii. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{sin(\frac{1}{z})dz}{z-1}$

iv. $\int\limits_{|z|=R} \frac{zdz}{e^{2\pi i z^2}-1}$, כאשר $n < R^2 < n+1$ עבור $n \in \mathbb{N}$ מסוים.

(ה) חשבו $\int\limits_{\gamma} \left(e^{1/\bar{z}} + e^{-1/\bar{z}}\right) dz$ כאשר $\gamma = \{re^{it} |\ t \in [0, \pi]\}$.

(4) חשבו את האינטגרלים הבאים:

i. $\int\limits_0^\pi \frac{cos^2(x)dx}{1-a\cdot sin^2(x)}$, עבור $0 < a < 1$ ii. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{cos(nx)}{a-cos(x)} dx$, עבור $a > 1$, $n \in \mathbb{N}$ iii. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{|ae^{it}-b|^4}$, עבור $0 < a < b$.