



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטיין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 11.

(1) חשבו אינטגרלים:

$$(א) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{i.} \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{1+x^2}}}{1+x^2} dx \quad \text{ii.} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} \quad \text{iii.} \quad \text{עבור } n > 0.$$

(כאן ניתן או לעבור ל $\int_{-\infty}^{\infty} (\dots)$ או להשתמש בקרן בזוית α ביחס לציר \hat{x} . מהו α ? איזו דרך קצרה יותר?)

(ב) במקרים הבאים התכוננו במלבן עם קודקודים $\{R, R + y_0i, -R + y_0i, -R\}$ עבור y_0 המתאים:

$$\text{i.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x} dx}{e^x + 1}, \quad \text{עבור } 0 < \alpha < 1 \quad \text{ii.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x) dx}{e^x + e^{-x}}$$

(ג) בתרגיל בית 5, (שאלה 4.ג) הוכחנו את למת ז'ורדן, עבור חצי-מעגל העליון: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} e^{iaz} f(z) dz = 0$, $a > 0$.

האם אותה הטענה נכונה גם עבור חצי-מעגל התחתון? (רמז: שארית של $f(z) = \frac{1}{z^n}$).

$$(ד) \quad \text{i.} \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin(x) dx}{x^2 + a^2}, \quad a > 0 \quad \text{ii.} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(x) dx}{\prod_{i=1}^n (x^2 + a_i^2)}, \quad 0 < a_1 < a_2 < \dots, n \geq 1 \quad \text{iii.} \quad \int_0^{\infty} e^{-t^2} \sin(t^2) dt$$

$$\text{iv.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \quad \text{v.} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

(גזרה עם זווית $\theta = \frac{\pi}{8}$ והערך הידוע של $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$) או במסלול $\{-\infty \rightsquigarrow -\epsilon \rightsquigarrow i\epsilon \rightsquigarrow \epsilon \rightsquigarrow \infty\}$ או בהצגה $\frac{\sin(x)}{x} = \text{Im}\left(\frac{e^{ix}-1}{x}\right)$

(2) (א) התמרת פורייה של f מוגדרת ע"י $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$. מצאו את התמרת פורייה בקרים הבאים. (האם

התשובה תלויה בסימן של t ?) $\text{i.} \quad f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ $\text{ii.} \quad f(x) = e^{-x^2}$ (היעזרו בשאלה 1)

$\text{iii.} \quad f(x) = \frac{1}{p(x)}$ עבור פולינום $p(x)$ עם שורשים לא ממשיים, שונים, $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_n, \bar{z}_n$.

(ב) התמרת לפלס של f מוגדרת ע"י $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$. התמרת לפלס הפוכה של $F(s)$ מוגדרת ע"י

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\lambda-it}^{\lambda+it} F(s) e^{sx} ds$$

נמצאות משמאל לישר $\text{Re}(z) = \lambda$. (אינטגרל זה נקרא *Bromwich integral* או *Fourier - Mellin integral*)

חשבו $\mathcal{L}^{-1}(F)$ עבור פונקציות הבאות: $\text{i.} \quad F(s) = \frac{1}{(a+s)^n}$ $\text{ii.} \quad F(s) = \frac{1}{s^2 - a^2}$

(3) (א) עבור פולינומים $p(z), q(z)$ עם $\deg(q) > \deg(p) + 1$ חשבו את $\text{Res}_{z=\infty} \frac{p(z)}{q(z)}$

(ב) הוכיחו/הפריכו (תפתרו בכמה דרכים שונות)

(i) אם ∞ נקודה סינגולרית מבודדת של f , אז $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = \text{Res}_{w=0} f\left(\frac{1}{w}\right)$

(ii) אם ∞ נקודה סינגולרית סליקה של f , אז $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$

(iii) אם $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ אז $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$

$$(ג) \quad \text{חשבו } \int_{|z|=10} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right) dz}{\cos\left(\frac{1}{z+i}\right)}$$

(ד) באילו מהתחומים הבאים קיימת פונקציה קדומה לפונקציה $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$?

$\text{i.} \quad \{ \text{Im}(z) < 0, \text{Re}(z) > 0 \}$ $\text{ii.} \quad \text{Ball}_1(1) \setminus \left\{ \frac{\pm 1}{\sqrt{n}} \mid 0 \neq n \in \mathbb{Z} \right\}$ $\text{iii.} \quad \mathbb{C} \setminus \text{Ball}_1(0)$

(4) (א) חשבו את $\text{Res}(f)$ עבור $f(z) = \text{Log} \frac{z}{z+2}$. האם ל f קיימת פונקציה קדומה ב $\mathbb{C} \setminus [-2, 0]$

(ב) נגדיר $g(z) = e^{\frac{f(z)}{n}}$. בדקו כי g הינה ענף אנליטי של $\sqrt[n]{\frac{z}{z+2}}$. באיזה תחום? חשבו את $\int_{|z|=3} g(z) dz$.