



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטיין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 12.

(1) שאלות חזרה

(א) נניח ש $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $|f(z)| \neq 1$ עבור כל $z \in \mathbb{C}$. האם f בהכרח קבועה?
 (ב) יהי Δ משולש שווה צלעות, עם קודקודים a, b, c . נגדיר $f(z) = |(z-a)(z-b)(z-c)|$. מצאו את $\sup_{z \in \Delta} (f(z))$.

רמז: את התנאי $z \in [a, b]$ כדאי לנסח בצורה $z = a(\frac{1}{2} + t) + b(\frac{1}{2} - t)$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(ג) יהי \mathcal{U} תחום חסום ותהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ ורציפה ב $\bar{\mathcal{U}}$. ניקח פולינום $p(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$, שכל השורשים שלו פשוטים.

נמצאים ב \mathcal{U} . נגדיר $q(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{U}} \frac{f(w) p(w) - p(z)}{p(w) w - z} dw$. הוכיחו: $q(z) = f(z)$ הינו פולינום המקיים: $\{q(z_j) = f(z_j)\}$.

ל $q(z)$ קוראים *Lagrange interpolating polynomial* ויש לו חשיבות באנליזה נומרית.

(ד) נראה הוכחה נוספת של משפט Liouville. תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ פונקציה חסומה.

(i) בהינתן $a, b \in \mathbb{C}$ נקודות זרות, חשבו $\int_{|z|=R} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)}$, כאן $R > \max(|a|, |b|)$.

(ii) מבלי להשתמש בסעיף (א), הוכיחו: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)} = 0$. הסיקו את המשפט.

(2) חשבו: i. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^5 + z + 1}$ ii. $\int_{|z|=R \gg 1} \frac{dz}{p(z)}$ כאן $p(z) = c_d z^d + \dots + c_0$, $c_d \neq 0$ iii. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)^2 \sin(x-i)}$

iv. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(i+x)^2 \sin(\frac{i-x}{i+x} - \frac{1}{3})}$ (כאן x ממשי) v. $\int_{\gamma} \frac{dz}{(e^{1-z}-1)(z^3-1)}$ עבור העקום: $\gamma = \{z = x + iy \mid x = \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{C}$

(3) הוכיחו: למשוואה $\sin(\tan(z)) - \tan(\sin(z)) = \epsilon z^4$ כאשר $|\epsilon| \ll 1$ יש לפחות 3 שורשים שונים, $0 \neq \epsilon$

(4) (א) תהי f מרומורפית ב \mathbb{C} , כך שכל האפסים וקטבים שלה נמצאים בתוך $Ball_r(z_0)$. הוכיחו:

i. קיימת פונקציה $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus Ball_r(z_0))$ המקיימת $f(z) = e^{h(z)}$ אמ"מ

ii. מספר האפסים של f ב $Ball_r(z_0)$ שווה למספר הקטבים (כולל הריבויים).

הסיקו: אם $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ לא מתאפסת באף נקודה אז $f(z) = e^{h(z)}$ עבור $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. (כלומר $\text{Log}(f)$ מוגדר היטב)

(ב) תהיינה $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. הוכיחו: $f^2 + g^2 \equiv 1$ אמ"מ קיימת $\phi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ כך ש $f(z) = \cos(\phi(z))$, $g(z) = \sin(\phi(z))$.

(ג) תהי f מרומורפית ב \mathbb{C} . נניח שקבוצת הערכים של f זרה לתת קבוצה $\mathbb{R}_{\leq 0} \subset \mathbb{C}$. הוכיחו: $f = \text{const}$.

(5) (א) יהי $p(z)$ פולינום מדרגה n . חשבו $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz$.

(ב) נגדיר מסילה $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ כאשר $\gamma_1(t) = e^{it}$, $\gamma_2(t) = -1 + 2e^{-2it}$, $\gamma_3(t) = 1 - i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

חשבו את האינדקס $\eta(\gamma, z)$ עבור כל $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

(ג) מצאו את האינדקס של מסילות הבאות, ביחס לראשית:

i. $\{z \mid |z| = 1\} \xrightarrow{\sin} \mathbb{C}$ ii. $\{z \mid |z| = 17\} \xrightarrow{\sin} \mathbb{C}$ iii. $\{z \mid |z| = 4\pi + \frac{\pi}{4}\} \xrightarrow{\frac{\cos(z)}{\sin^2(z)}} \mathbb{C}$

(ד) יהי $\mathcal{U} \subset \{z \mid \text{Re}(z) > 0\}$ תחום חסום ותהי $f(z) = e^{-z} - a_0 - a_1 z$, $a_0 > 1$, $a_1 \geq 0$. מצאו את האינדקס של

מסילה $\partial \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

(ה) נגדיר $\gamma \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ $[0, 2\pi]$ ע"י $\gamma(t) = \frac{((\cos(2t) - \cos(t)) + i(\sin(2t) - \sin(t)) + 0.25) e^{\frac{\cos(t) - 2 - i \sin(t)}{5 - 4 \cos(t)}}}{\frac{1}{2} \sin(\cos(t) + i \sin(t)) - i \sin(t) - \cos(t)}$. כמה פעמים γ מקיפה את

הראשית? (הדרכה: מצאו פונקציה f כך ש $\gamma(t) = f(e^{it})$. בטאו את אינדקס $\eta(\gamma, 0)$ בעזרת f .)
 (ו) מצאו את מספר האפסים של $f(z) = z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3$ בתחום $\{z \mid \text{Re}(z) > 0\}$. (הדרכה: נגדיר מסילה סגורה $[iR, -iR] \cup \Gamma_R$, כאשר $\Gamma_R = \text{עצי מעגל העובר דרך הנקודות } -iR, R, iR$. השתמשו בעקרון הארגומנט עבור $f(z)$ בתוך המסילה ובדקו את הגבול $R \rightarrow \infty$. שימו לב שהפולינום $z^4 + 3z^2 + 3$ לא מתאפס עבור $z \in i\mathbb{R}$.)