



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטיין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 13.

- (1) (א) תהי $f \in \mathcal{O}(U)$ לא קבועה. הוכיחו ש f שולחת קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות. (הוכחנו בהרצאות בהנחה ש $f'(z)$ לא מתאפסת באף נקודה. עכשיו ניתן לטפל גם מקרה הכללי) האם הטענה מתקיים גם עבור פונקציות ממשיות?
- (ב) יהי $U \subset \mathbb{C}$ פתוח. האם קיימת $f \in \mathcal{O}(U)$ שתמונתה היא $\mathbb{C} \setminus (0, 1)$?
- (ג) יהי U תחום פשוט קשר ותהי $f \in \mathcal{O}(U)$. נניח ש f מתאפסת רק בנקודה $z_0 \in U$ ו $ord_{z_0}(f) = n$. הוכיחו: קיימת הצגה $f(z) = (g(z))^n$, כאשר $g'(z_0) \neq 0$ ו g אנליטית ב U כולו.

- (2) (א) (הכללה של עקרון הארגומנט) תהי f מרומרפית ב \bar{U} עם אפסים בנקודות z_1, \dots, z_k מסדרים n_1, \dots, n_k , ועם קטבים בנקודות w_1, \dots, w_l מסדרים m_1, \dots, m_l . תהי $g \in \mathcal{O}(\bar{U})$. נניח ש f, g לא מתאפסות באף נקודה של ∂U .

$$\text{הוכיחו: } \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k n_j g(z_j) - \sum_{j=1}^l m_j g(w_j)$$

- (ב) נגדיר $p(z) = z^{10} + 3z^3 + 1$ ונתבונן בעקומה $p(\partial \text{Ball}_1(0))$. כמה פעמים העקומה עוקפת את הראשית?
- (ג) נניח שפונקציה רציונלית $\frac{p(z)}{q(z)}$ מקבלת רק ערכים ממשיים סופיים על $\{|z|=1\}$. מה ניתן להגיד על האפסים/קטבים שלה?
- (ד) כמה פתרונות יש למשוואה $z^7 + z^3 - 4z + 1 = 0$ ב $\{z \mid 1 < |z| < 3\}$?
- (ה) תהי $\text{Ball}_2(0) \xrightarrow{f} \text{Ball}_1(0)$ פונקציה אנליטית. כמה פתרונות יש למשוואה $f(z) = z^n$ ב $\text{Ball}_2(0)$?
- (ו) נניח ש $\text{Re}(c) > 1$. כמה פתרונות של משוואה $ze^{c-z} = 1$ נמצאים בתוך $\text{Ball}_1(0)$?
- (ז) תהינה $f, g \in \text{Ball}_\epsilon(0)$ ונניח ש $|\frac{g}{f}| < 10^{-10}$ על $\partial \text{Ball}_\epsilon(0)$. האם $\frac{g}{f}$ בהכרח חסומה ב $\text{Ball}_\epsilon(0)$?

- (3) (א) תהי $\mathbb{C} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$ העתקה (לא בהכרח אנליטית) ששומרת מרחקים, כלומר $|\phi(z_1) - \phi(z_2)| = |z_1 - z_2|$. הוכיחו שהעתקה היא $\phi(z) = e^{i\theta}z + z_0$ או $\phi(z) = e^{i\theta}\bar{z} + z_0$. (רמז: הזווית וסיבובים שומרים מרחקים. לכן ניתן להניח: $\phi(1) = 1, \phi(0) = 0$. מאכן ניתן לקבל: ϕ פועלת כזהות על ציר ממשי. לכן $\phi(i) = \pm i$.)
- (ב) תהי $f \in \mathcal{O}(U)$ ונניח ש $ord_{z_0} f(z) = p$. הוכיחו: העתקה f כופלת זוויות בנקודה z_0 ב p .
- (ג) הוכיחו: העתקה $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ דיפרנציאבילית $U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ הינה קונפורמית אם U היא אנליטית, עם נגזרת לא מתאפסת. (את הכיוון \Rightarrow ראינו בהרצאה. עבור הכיוון \Leftarrow בדקו שמטריצת הנגזרות, D_f , מקיימת את תנאי קושי-רימן בכל נקודה)

- (4) (א) נגדיר $f(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ וגם $g(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$. הוכיחו: $f(g(z)) = \frac{a_3z+b_3}{c_3z+d_3}$ כאשר $\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$. רשמו את הביטוי עבור f^{-1} .
- (ב) נגדיר $T(z) = \frac{z}{3z+1}, S(z) = \frac{2z-1}{z-3i}$. חשבו: i. $T \circ S$, ii. $S \circ T$, iii. $S^{-1} \circ T \circ S$.
- (ג) נגדיר העתקות בסיסיות: מתיחה $(z \xrightarrow{S_\lambda} \lambda z)$, הזזה $(z \xrightarrow{T_a} z+a)$, הפיכה $(z \xrightarrow{Inv} \frac{1}{z})$. הוכיחו שכל העתקה $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ניתנת להצגה כהרכבה של העתקות: $T_\gamma \circ S_\beta \circ Inv \circ T_\alpha$. הוכיחו שהעתקות Möbius ששולחות את 0 ל ∞ הן בדיוק מהצורה $T_\gamma \circ S_\beta \circ Inv$. מה התכונה המאפיינת של העתקות מהצורה $T_\gamma \circ S_\beta \circ Inv \circ T_\alpha$?
- (ד) מצאו את כל נקודות השבת של העתקה $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
- (ה) הוכיחו שהעתקה $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ שולחת מעגלים וישרים למעגלים וישרים. (הדרכה: תשתמשו בהצגה כללית של ישרים/מעגלים, $pz\bar{z} + qz + r\bar{z} + s = 0$ כאן $p, q, r, s \in \mathbb{R}$.)