



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטיין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 2.

$$(1) \quad (א) \quad f \text{ נגדיר בקואורדינטות קוטביות, עם } \theta \in (0, 2\pi] \text{ ע"י } f(z) = \begin{cases} \frac{r}{\theta}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

האם f רציפה לאורך כל ישר (ממשי) דרך 0? האם f רציפה ב 0?

(ב) הוכיחו: פונקציה $\mathbb{C} \supseteq \mathcal{U} \xrightarrow{f=u+iv} \mathbb{C}$ רציפה (במובן המרוכב) אם ומתקיים הפונקציה $\mathbb{R}^2 \supseteq \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ רציפה (במובן הממשי).

$$(2) \quad (א) \quad \text{נניח ש } \mathbb{C} \supseteq \mathcal{D} \xrightarrow{f,g} \mathbb{C} \text{ גזירות (במובן המרוכב). קבלו (הוכיחו) את הנוסחאות עבור: } (f(z)g(z))' \quad \text{i.} \quad (f(z)/g(z))' \quad \text{ii.}$$

(ב) הוכיחו את כלל השרשרת: אם $\mathcal{D}_g \xrightarrow{g} \mathcal{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ גזירות בנקודות $w_0, g(w_0)$ אז $f(g(w))|_{w_0} = f'|_{g(w_0)} \cdot g'|_{w_0}$

(ג) איילו מבין פונקציות הבאות הן פונקציות אנליטיות? (באילו תחומים?) (כאן $z = x + iy$)

$$\text{iii. } f(z) = \cos(x) \cdot \cosh(y) - i \sin(x) \cdot \sinh(y) \quad \text{ii. } f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z) \quad \text{i. } f(z) = \frac{ix+1}{y}$$

(ד) קבלו הצגה קוטבית של משוואות Cauchy-Riemann: $\frac{\partial f}{\partial \phi} = ir \frac{\partial f}{\partial r}$. רשמו אותם בצורה מפורשת עבור $f = u + iv$.

$$(3) \quad \text{בהרצאה הגדרנו } e^{x+iy} := e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

(א) מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $e^z = 1 + i$

$$\text{(ב) בדקו: } \text{i. } e^z e^w = e^{z+w} \quad \text{ii. } (e^z)^n = e^{nz} \quad \text{iii. } \overline{e^z} = e^{\bar{z}} \quad \text{iv. } |e^z| = e^x \quad \text{v. } e^{z+2\pi i} = e^z$$

(ג) ציירו את התמונה ע"י $\exp(z)$ של קבוצות הבאות:

$$\text{i. } \{z \mid \operatorname{Im}(z) = 0\} \quad \text{ii. } \{z \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} \quad \text{iii. } \text{ישר ב } \mathbb{C} \text{ העובר דרך } 0. \quad \text{iv. } \text{ישר כלשהו ב } \mathbb{C}.$$

$$\text{(ד) חשבו } \sum_{k=0}^n e^{ikx}. \text{ הסיקו מכאן: } \left| \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}. \text{ עבור כל } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi\mathbb{Z}\} \text{ וכל } n \in \mathbb{N}.$$

(ה) חשבו (כלומר, רשמו את התשובה כביטוי קצר דרך \cos, \sin)

$$\text{i. } \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) \quad \text{ii. } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb) \quad \text{iii. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{it} + \dots + e^{nit}}{n}$$

(ו) בדקו ש e^z הינה פונקציה אנליטית וחשבו את נגזרתה.

(ז) (התנהגות של e^z באינסוף) נתבונן ב $e^{\frac{1}{z}}$. הראו שעבור כל $\epsilon > 0$ התמונה של $\text{Ball}_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ ע"י $e^{\frac{1}{z}}$ היא $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

בפרט, $e^{\frac{1}{z}}$ מקבלת כל ערך, פרט ל 0, אינסוף פעמים בכל סביבה של 0. בפרט, הגבול $\lim_{z \rightarrow 0} (e^{\frac{1}{z}})$ רחוק מלהיות קיים.

$$(4) \quad \text{נגדיר } \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (\text{אז בפרט: } e^{iz} = \cos(z) + i \cdot \sin(z) \text{ עבור כל } z \in \mathbb{C})$$

(א) הוכיחו שהפונקציות אנליטיות ומתקיים: $\cos'(z) = -\sin(z), \sin'(z) = \cos(z)$

$$\cos(z + 2\pi) = -\cos(z + \pi) = \cos(z), \quad \sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$$

(ב) קבלו את הנוסחאות $\dots, \sin(z+w) = \dots, \cos(z+w) = \dots, \sin(2z) = \dots, \cos(2z) = \dots$

$$(ג) \text{ בדקו: } \sin(x + iy) = \cos(x) \cdot \cosh(y) - i \sin(x) \cdot \sinh(y)$$

$$(5) \quad (א) \quad \text{תהי } f \in \mathcal{O}(D) \text{ ונניח שמתקיים: } a \cdot u(z) + b \cdot v(z) + c = 0. \text{ מצאו את } f.$$

(ב) תארו את כל הפונקציות האנליטיות $f = u + iv$ שעבורן

$$\text{i. } u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{ii. } u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{iii. } f(x, y) = u(x) + iv(y) \quad \text{iv. } |f(x, y)| = e^y$$