



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071
 אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטיין, י. שטראוס, ד. קרנר)
 תרגיל בית מס' 3.

(1) יהי $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר מסילתית ותהי $f = u + iv \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$

- (א) הוכיחו: אם $u = \text{const}$ או $f = \text{const}$.
 (ב) הוכיחו: אם $|f| = \text{const}$ או $f = \text{const}$. (הערה: ניתן לפתור את א', ב' לפחות בשתי דרכים שונות).
 (ג) יהי $p(t_1, t_2) \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ פולינום לא קבוע עם מקדמים ממשיים. הוכיחו: אם $p(u, v) = \text{const}$ או $f = \text{const}$.
 (הדרכה: כמו בסעיפים הקודמים קבלו: $\frac{\partial p}{\partial t_1}|_{(u,v)} = 0 = \frac{\partial p}{\partial t_2}|_{(u,v)}$. הפעילו אינדוקציה.)

(2) הפונקציות הבאות הינן פונקציות אלמנטריות במשתנים (x, y) או (r, ϕ) . האם ניתן להציג אותן כפונקציות אלמנטריות במשתנה יחיד z ?
 i. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + 2i \cdot \text{arctan} \frac{y}{x}$ ii. $f(re^{i\phi}) = \frac{\cos(2\phi) - i \cdot \sin(2\phi)}{r^2}$

(3) יהי $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ תחום סימטרי ביחס לציר \hat{x} (כלומר הוא נשמר תחת הצמדה). הוכיחו: פונקציה $\mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ אנליטית אמ"מ $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ אנליטית.

(4) תהי $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ פונקציה גזירה ברציפות, עם המישור המשיק (בנקודה מסוימת): $\{x_1 + 2x_2 = 0, x_3 + 2x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$. האם f יכולה להיות אנליטית?

(5) (א) תהי $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $\partial_x f - i \cdot \partial_y f = 0$ (ב \mathbb{R}^2 כולו). האם f בהכרח קבועה?
 (ב) נניח ש $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $f(0) = 1, f'(z) = f(z)$. הוכיחו: $f(z) = e^z$. (רמז: התבוננו ב $(f(z)e^{-z})$)

(6) (א) יהי f הענף הראשי של $\sqrt[n]{z}$. הוכיחו/הפריכו:
 i. $\sqrt[n]{z^n} = z$ ii. $(\sqrt[n]{z})^n = z$ iii. $\sqrt{z \cdot e^{2\pi i}} = \sqrt{z}$ iv. $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$
 v. אם z, w, zw נמצאים בתחום הגדרה של הענף הראשי אז $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$
 vi. אם $Re(z) > 0, Re(w) > 0$ אז $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$ vii. $\sqrt[n]{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\sqrt[n]{z}}$
 (ב) תארו את התמונה של הענף הראשי של $\sqrt[n]{z}$. לאן הפונקציה שולחת את הקרן $\text{Ray}_{a,b} := \{(at, bt) | t \in \mathbb{R}_{>0}\}$?
 (ג) יהי $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \{Re(z) < 0\}$ ענף אנליטי של $\sqrt[4]{z}$ המקיים $f(-1) = e^{\frac{11\pi i}{16}}$. חשבו את $f(-1)$.
 (ד) יהי $\mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$. חשבו $\frac{z \cdot f'(z)}{f(z)}$.
 (ה) יהיו $\mathcal{D} \xrightarrow{f_1, f_2} \mathbb{C}$ שני ענפים אנליטיים של $\sqrt[n]{z}$. חשבו: $\frac{f_1(z)f_2'(z)}{f_1'(z)f_2(z)}$ עבור כל $z \in \mathcal{D}, z \neq 0$.

(7) (א) נראה שלא ניתן להכליל את משפט על ערך הביניים (של חדו"א 1) לפונקציות מרוכבות. נתבונן ב $f(z) = e^{iz}$ המוגדרת על קטע $\mathbb{C} \subset \mathbb{R} \subset [0, \pi]$. הראו שאף נקודה של קטע $\mathbb{C} \subset \mathbb{R} \subset [0, \pi]$ לא מתקבלת כערך של f . (למרות ש f רציפה.)

(ב) נזכיר את משפט Lagrange (של חדו"א 1): אם $[a, b] \xrightarrow{f} R$ רציפה ב $[a, b]$ וגזירה ב (a, b) אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. האם המשפט מתקיים עבור פונקציות מרוכבות?