יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 4.

(1) (א) יהי $Log(z)$ הענף הראשי של פונקצית לוגריתם. חשבו $Log(\frac{a+ib}{a-ib})$. ($a, b \in \mathbb{R}$)

(ב) האם Log היא פונקציה חח"ע? לאן Log שולחת את הקרן $Ray_{a,b} := \{(at, bt) | t \in \mathbb{R}_{>0}\}$?

(ג) הוכיחו/הפריכו:

i. $Log(e^z) = z$ ii. $e^{Log(z)} = z$ iii. $Log(e^{z+2\pi i}) = z + 2\pi i$ iv. $Log\frac{1}{z} = -Log(z)$

v. אם z, w, zw הם בתחום הגדרה של Log אז $Log(zw) = Log(z) + Log(w)$

vi. אם $Re(z), Re(w) > 0$ אז $Log(zw) = Log(z) + Log(w)$

(ד) האם לפונקציה $\frac{1}{z}$ קיימת פונקציה קדומה ב $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? (כלומר, פונקציה אשר מקיימת $F'(z) = \frac{1}{z}$)

(2) (א) הוכיחו/הפריכו:

(i) הטור $\sum z_n$ מתכנס אמ"מ הטורים $\sum Re(z_n)$, $\sum Im(z_n)$ מתכנסים.

(ii) אם הטור $\sum z_n$ מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס במובן הרגיל.

(iii) נניח שטור $\sum a_n z^n$ מתכנס עבור $z = z_0$. אז (רדיוס ההתכנסות) $R \geq |z_0|$.

(iv) נניח שטור $\sum a_n z^n$ מתבדר עבור $z = z_0$. אז (רדיוס ההתכנסות) $R \leq |z_0|$.

(ב) נניח שרדיוסי ההתכנסות של $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ הינם R_a, R_b. מה ניתן להגיד על רדיוס ההתכנסות של $\sum a_n b_n z^n$?

(ג) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum \frac{z^n}{n^s}$, עבור כל $s \in \mathbb{R}$. (מספיק לבדוק רק את נקודות הפנים) איפה ההתכנסות היא במ"ש? בדקו שבנקודות הפנים של תחום ההתכנסות הטור מתכנס לפונקציה אנליטית $f(z)$. עבור $s = -2$ רשמו את $f(z)$ בצורה מפורשת.

(ד) מצאו את טור חזקות המתכנס לפונקציה f אשר מקיימת: $f(z^2) = z + f(z)$. מהו תחום ההתכנסות?

(3) (א) הוכיחו: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ב $\mathbb{C}$ כולו. (חזרו על שתי ההוכחות שניתנו בהרצאה)

(ב) הוכיחו: $sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ ב $\mathbb{C}$ כולו.

(ג) פתחו את $\frac{1}{z-z_0}$ לטור חזקות סביב נקודה z_1. ($\frac{1}{z-z_0} = \sum a_n (z - z_1)^n$, $z_1 \neq z_0$.) מהו תחום ההתכנסות של הטור?

(ד) הוכיחו: $Log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ ב $Ball_1(0)$.

(ה) פתחו את הפונצקיה $f(z) = z^3 \cdot Log(1 + z^3)$ לטור חזקות סביב הנקודה $z = 0$.

(4) נגדיר $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, עם המקדמים ממשיים, $a_n \in \mathbb{R}$. נניח שהטור מתכנס ב $Ball_r(0)$.

(א) נניח ש f מתאפסת בקטע ממשי מסוים, $(-\epsilon, \epsilon) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. הוכיחו ש f מתאפסת זהותית ב $Ball_r(0)$ כולו.

(ב) נגדיר את הצמצום של f לציר ממשי: $(-r, r) \overset{g(x)=f(x)}{\to} \mathbb{R}$. נניח ש g מקיימת משוואה $\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{d^k g(x)}{dx^k} + c_0 = 0$, כאן $\{c_j \in \mathbb{R}\}$. הוכיחו כי f מקיימת את המשוואה $\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{d^k f(z)}{dz^k} + c_0 = 0$.