יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2019 (מרצים: נ. איידלשטין, י. שטראוס, ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 5.

(1) פונקציה $\mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ נקראת זוגית אם מתקיים $f(z) = f(-z)$ עבור כל $z \in \mathcal{D}$. (ואי-זוגית כאשר $f(z) = -f(-z)$)

(א) אילו מבין $cos(z)$, $sin(z)$, $ln(z\overline{z})$, $Log(z^2)$, $\sqrt{z^2}$ הן (אי-)זוגיות?

(ב) הוכיחו שכל פונקציה $Ball_r(0) \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ ניתנת לייצוג כ $f = f_+ + f_-$ כאשר f_+ זוגית ו f_- אי-זוגית. נניח ש f הינה אנליטית, האם $f_\pm$ בהכרח אנליטיות?

(ג) הוכיחו: $f \in \mathcal{O}(Ball_r(0))$ הנה (אי-)זוגית אמ"מ טור טיילור שלה ב $z = 0$ מכיל רק חזקות (אי-)זוגיות.

(2) הוכיחו: $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$. (הדרכה: בדקו $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}|1+\frac{x+iy}{n}|^n$ וגם $y = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n \cdot Arg(1+\frac{x+iy}{n})\right)$.)

(3) תהי $[0,1] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}$ מסילה שלא עוברת דרך $0 \in \mathbb{C}$.

(א) הראו שקיימת מסילה $[0,1] \xrightarrow{\delta} \mathbb{C}$ כך ש $\gamma(t) = e^{\delta(t)}$ לכל $t \in [0,1]$. (ניתן להשתמש בעובדה הבאה: עבור כל $\epsilon > 0$ קיימת חלוקה $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ כך שתמונת הקטע $[t_i, t_{i+1}]$ נמצאת בתוך איזשהו $Ball_\epsilon(\dots)$.)

(ב) נניח ש γ מסילה סגורה, $\gamma(0) = \gamma(1)$. הוכיחו: $\delta(1) - \delta(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. האם δ בהכרח מסילה סגורה?

(ג) נניח שמסילה אחרת $[0,1] \xrightarrow{\tilde{\delta}} \mathbb{C}$ גם מקיימת $\gamma(t) = e^{\tilde{\delta}(t)}$. הוכיחו $\tilde{\delta}(t) - \delta(t) = const$. מהם הערכים האפשריים של הקבוע?

(4) יהיו $0 \le \phi_1 < \phi_2 \le \pi$, $R > 0$ ונגדיר מסילה $[\phi_1, \phi_2] \xrightarrow{\gamma_{R,\phi_1,\phi_2}} \mathbb{C}$ ע"י $\gamma_{R,\phi_1,\phi_2} := \{z = Re^{i\phi} |\ \phi_1 \le \phi \le \phi_2\}$.

(א) תהי f פונקציה רציפה המקיימת: $|f(z)| < \frac{C}{|z|^{1+\epsilon}}$ עבור $|z| \gg 1$ וקבועים $C, \epsilon > 0$. הוכיחו: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_{R,\phi_1,\phi_2}} f(z)dz = 0$.

(ב) יהיו $p, q \in \mathbb{C}[z]$ שני פולינומים, כך ש $deg(q) = deg(p) + 1$. הוכיחו/הפריכו: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_{R,\phi_1,\phi_2}} \frac{p(z)}{q(z)}dz = 0$.

(ג) תהי f פונקציה רציפה המקיימת: $\lim\limits_{R\to\infty}\left(\max\limits_{|z|=R}|f(z)|\right) = 0$. הראו שלכל $a > 0$ מתקיים: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_{R,\phi_1,\phi_2}} e^{iaz}f(z)dz = 0$.
(כאן הבדילו בין מקרה $0 < \phi_1 < \phi_2 < \pi$ לבין מקרה $0 = \phi_1 < \phi_2 = \pi$.)

(5) (א) נסמן ע"י γ את המשולש עם קודקודים $0, 1, i$ (הכיוון חיובי). חשבו: i. $\oint\limits_\gamma z^n dz$ ii. $\oint\limits_\gamma \overline{z}^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$.

(ב) יהי $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ תחום חסום ופתוח, עם שפה $\partial\mathcal{U}$- עקום חלק למקוטעין (הכיוון חיובי). הוכיחו: $\int\limits_{\partial\mathcal{U}} \overline{z}dz = 2i \cdot Area(\mathcal{U})$.

(ג) תהי $\gamma = \{z |\ Im(z) \ge 0,\ |z| = 1\}$, נגד כיוון השעון. חשבו: $\int\limits_\gamma e^{x^2-y^2}(x+iy)\big(cos(2xy) + i \cdot sin(2xy)\big)dz$.

(ד) חשבו $\int\limits_0^t e^{ax}cos(bx)dx$, $\int\limits_0^t e^{ax}sin(bx)dx$, כאן $a, b, t \in \mathbb{R}$.

(6) נניח ש F_1, F_2 פונקציות קדומות ל f על $\mathcal{U}$ קשירה מסילתית. הוכיחו: $F_1(z) - F_2(z) = const$.